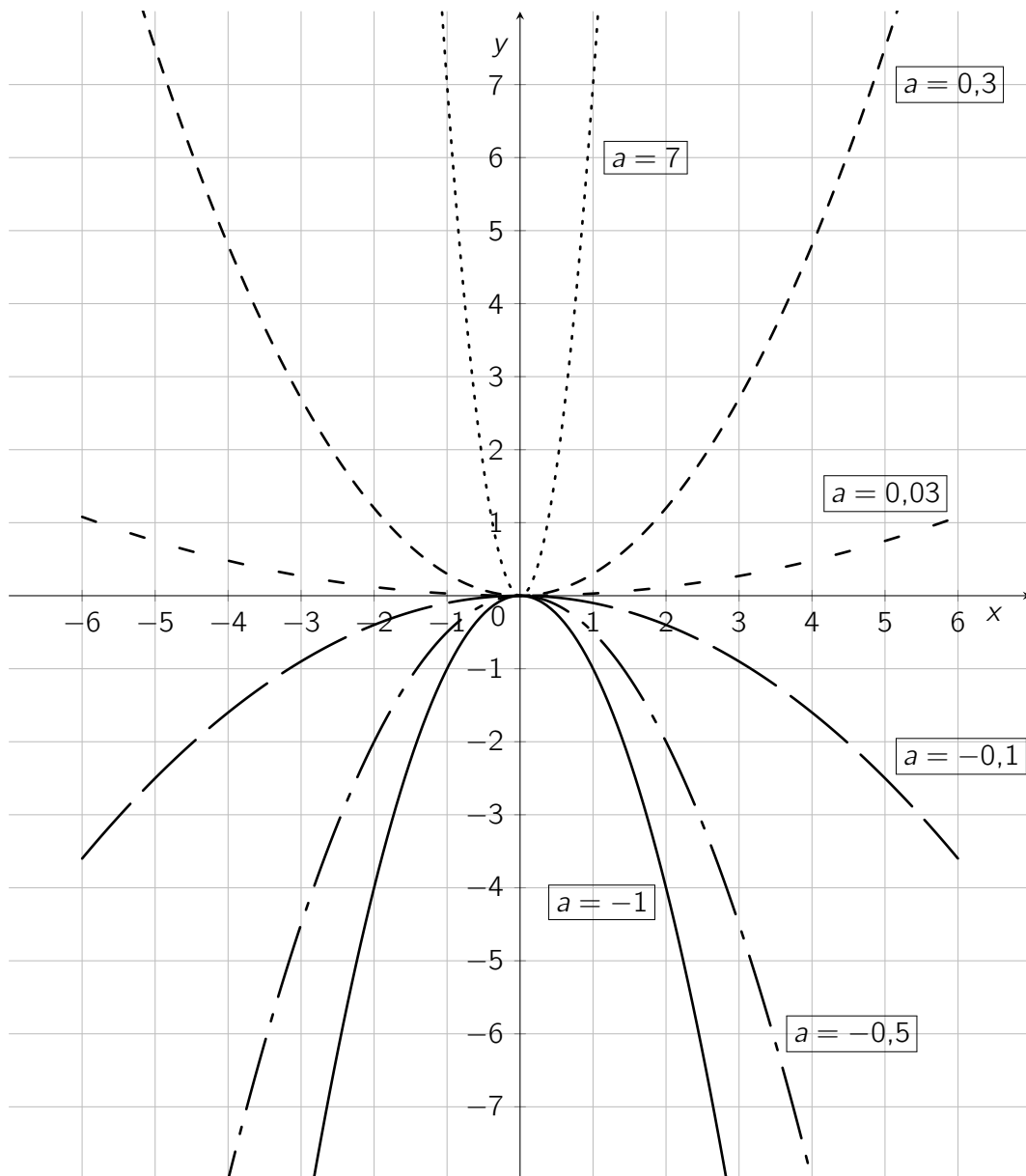


Chapitre 3 – 5^e

Exercice 1

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^2$ avec diverses valeurs de a .

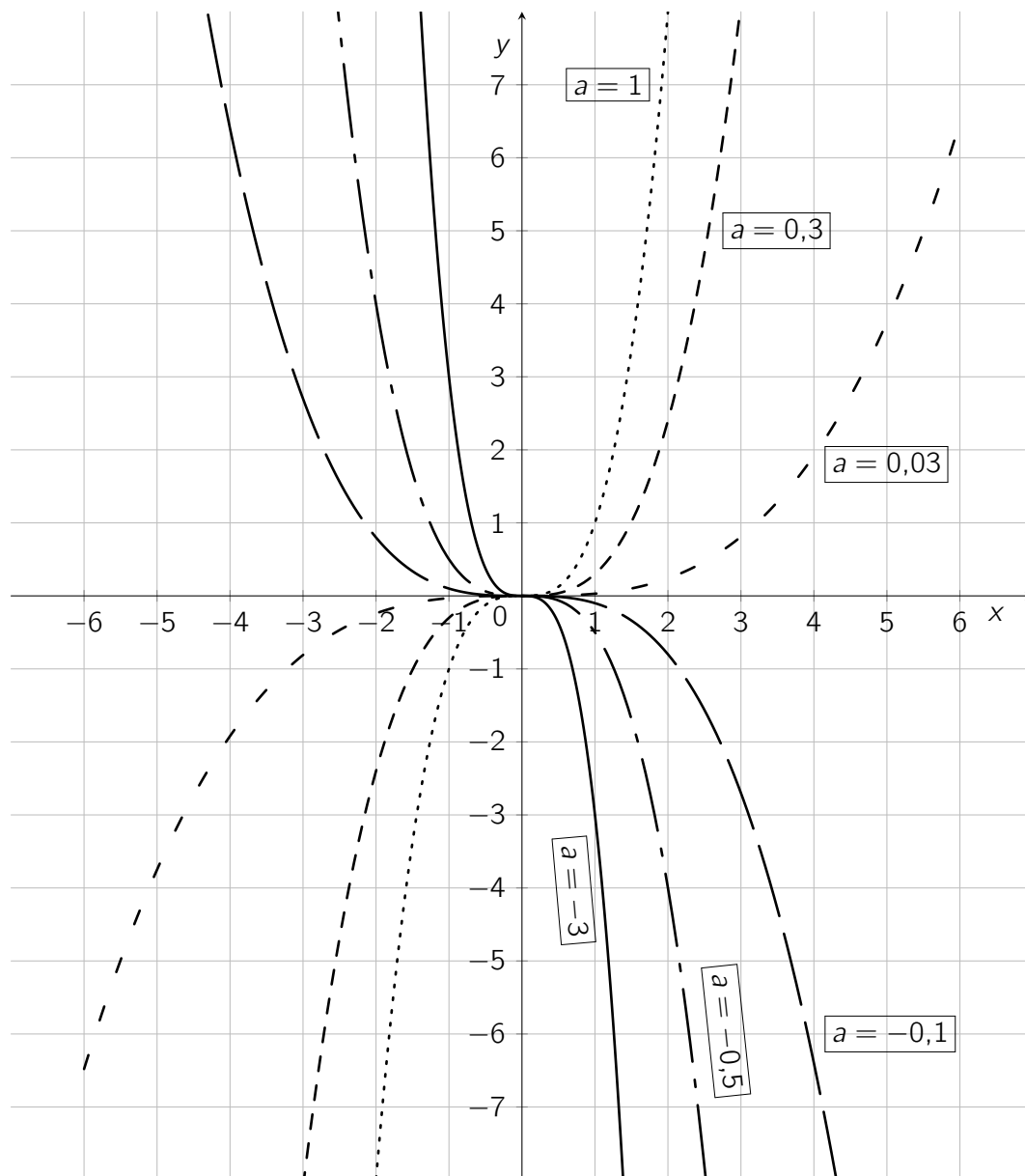
Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.



Exercice 2

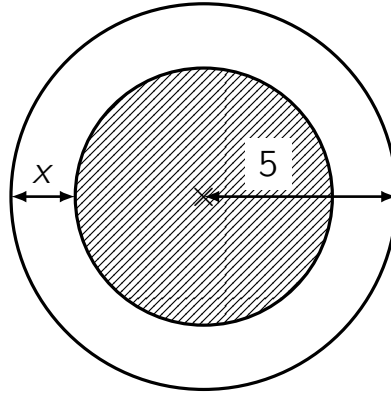
Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^3$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.



Exercice 3 (1.)

À l'intérieur d'un parterre circulaire dont le rayon vaut 5 mètres, on trace un sentier en forme de couronne.

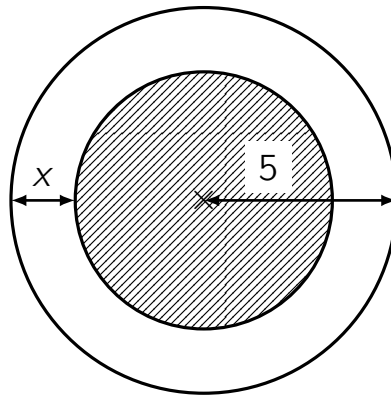


1. Peut-on dire que l'aire du sentier (aire blanche) est proportionnelle à sa largeur ? Écrire la formule qui justifiera la réponse.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{sentier}} &= A_{\text{totale}} - A_{\text{hachurée}} \\
 &= \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot (5 - x)^2 \\
 &= \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot (5^2 - 10x + x^2) \\
 &= 25\pi - 25\pi + 10\pi x - \pi x^2 \\
 &= \pi \cdot (10x - x^2)
 \end{aligned}$$

L'aire du sentier étant fonction, entre autres, du carré de sa largeur, alors l'aire n'est pas proportionnelle à sa largeur.

Exercice 3 (2.)



2. Quelle doit être la largeur du sentier pour que son aire soit égale à l'aire hachurée ?

$$A_{\text{sentier}} = \pi \cdot (10x - x^2)$$

$$A_{\text{hachurée}} = \pi \cdot (25 - 10x + x^2)$$

$$\pi \cdot (10x - x^2) = \pi \cdot (25 - 10x + x^2)$$

$$10x - x^2 = 25 - 10x + x^2$$

$$-x^2 - x^2 + 10x + 10x - 25 = 0$$

$$-2x^2 + 20x - 25 = 0$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-25)}}{2 \cdot (-2)}$$

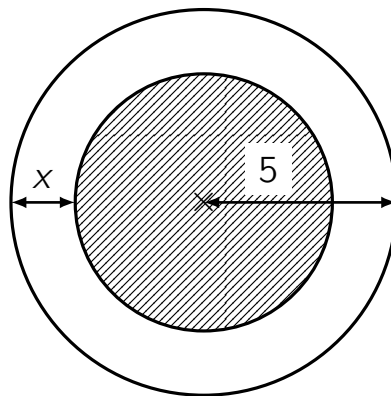
$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 200}}{-4}$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{200}}{-4}$$

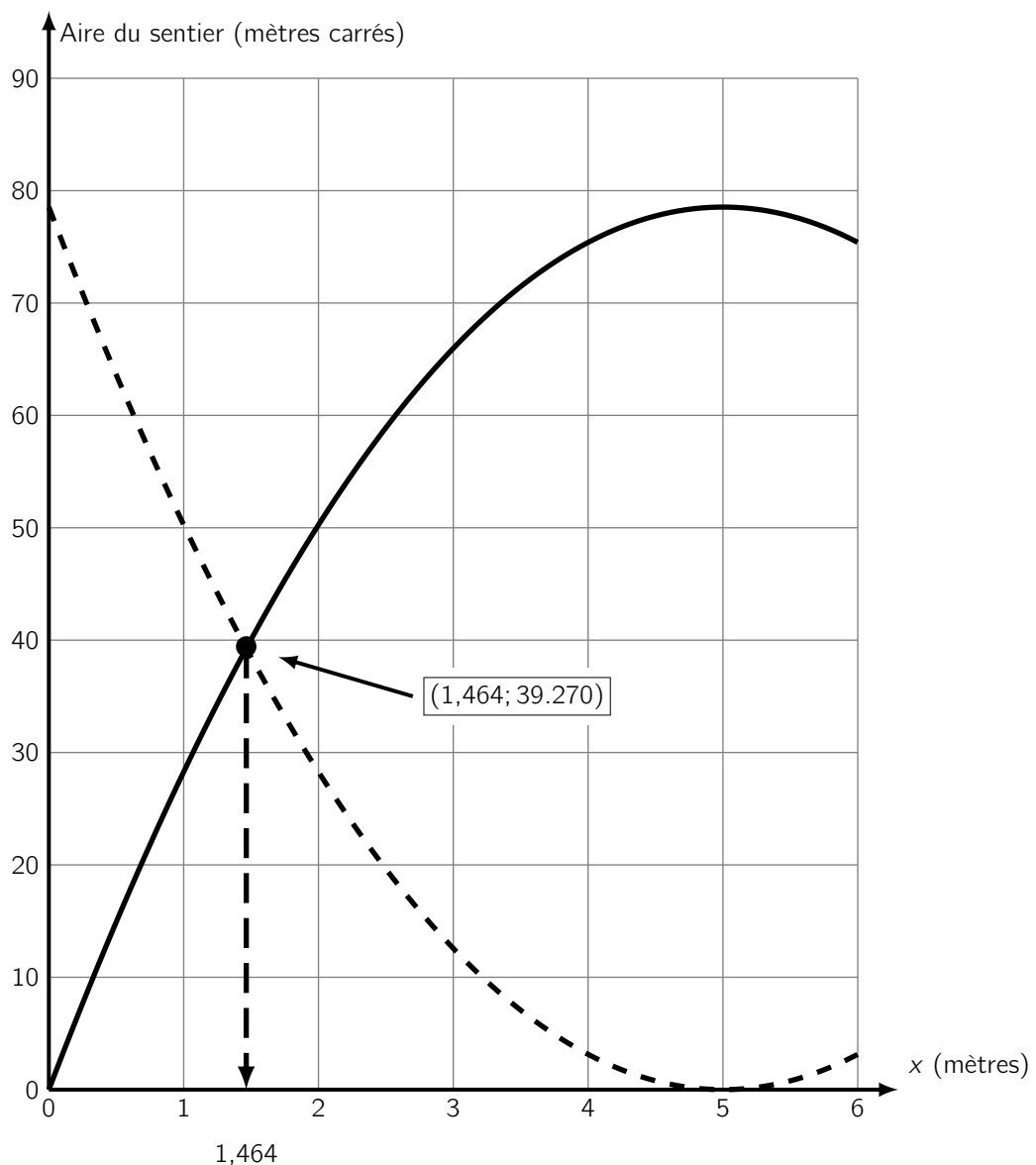
$$x = \begin{cases} 1,46446... \\ 8,53553... \end{cases} \rightarrow \text{à rejeter}$$

La largeur du sentier est donc de 1,464 mètres.

Exercice 3 (3.)

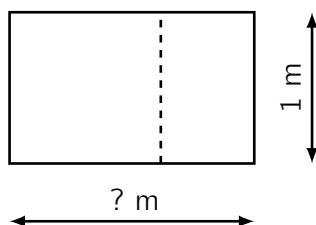


3. Représenter graphiquement l'évolution des aires (sentier et hachurée) en fonction de x . Que constate-t-on ?



Exercice 4

On dit qu'un rectangle est un *rectangle d'or* si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier (préservation du rapport des côtés).



1. Déterminer la longueur d'un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 mètre.

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x \cdot (x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

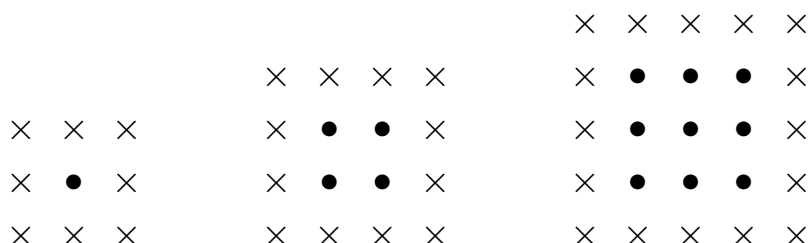
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \begin{cases} -0,618... & \rightarrow \text{à rejeter} \\ 1,618... \end{cases}$$

2. Comment appelle-t-on ce nombre bien célèbre ?
Il s'agit du « nombre d'or » ($\approx 1,618\,033\,988\,749\,894...$)

Exercice 5 (1., 2. et 3.)

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de les protéger contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Déterminer le nombre minimum de rangées (n) pour lequel il y a plus de pommiers (●) que de conifères (×).



Pour ce faire, répondre aux questions suivantes :

1. Réaliser un tableau comprenant 3 lignes : le nombre de rangées, le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Ce tableau permettra de répondre aisément aux deux questions suivantes.

Nb. n de rangées	0	1	2	3
Nb. P de pommiers (●)	0	1	4	9
Nb. C de conifères (×)	4	8	12	16

2. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de pommiers (●) ?

$$P = n^2$$

3. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de conifères (×) ?

$$C = 4 \cdot (n + 1)$$

Exercice 5 (4.)

4. Calculer le nombre minimum de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir plus de pommiers que de conifères.

Pour se simplifier la tâche, partons du principe que l'on recherche le nombre de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir autant de pommiers que de conifères :

Rappel :

$$P = n^2 \quad \text{et} \quad C = 4 \cdot (n + 1)$$

$$n^2 = 4 \cdot (n + 1)$$

$$n^2 = 4n + 4$$

$$n^2 - 4n - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x = \begin{cases} -0,8... & \rightarrow \text{à rejeter} \\ 4,8... \end{cases}$$

La valeur de 4,8 est une valeur théorique indiquant le nombre de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir autant de pommiers que de conifères. Mais la question posée est de savoir le nombre de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir **plus** de pommiers que de conifères. Il va donc falloir arrondir la valeur de 4,8. Mais à la hausse (5) ou à la baisse (4) ?

Spontanément, nous voyons qu'**il faut choisir la valeur de 5**.

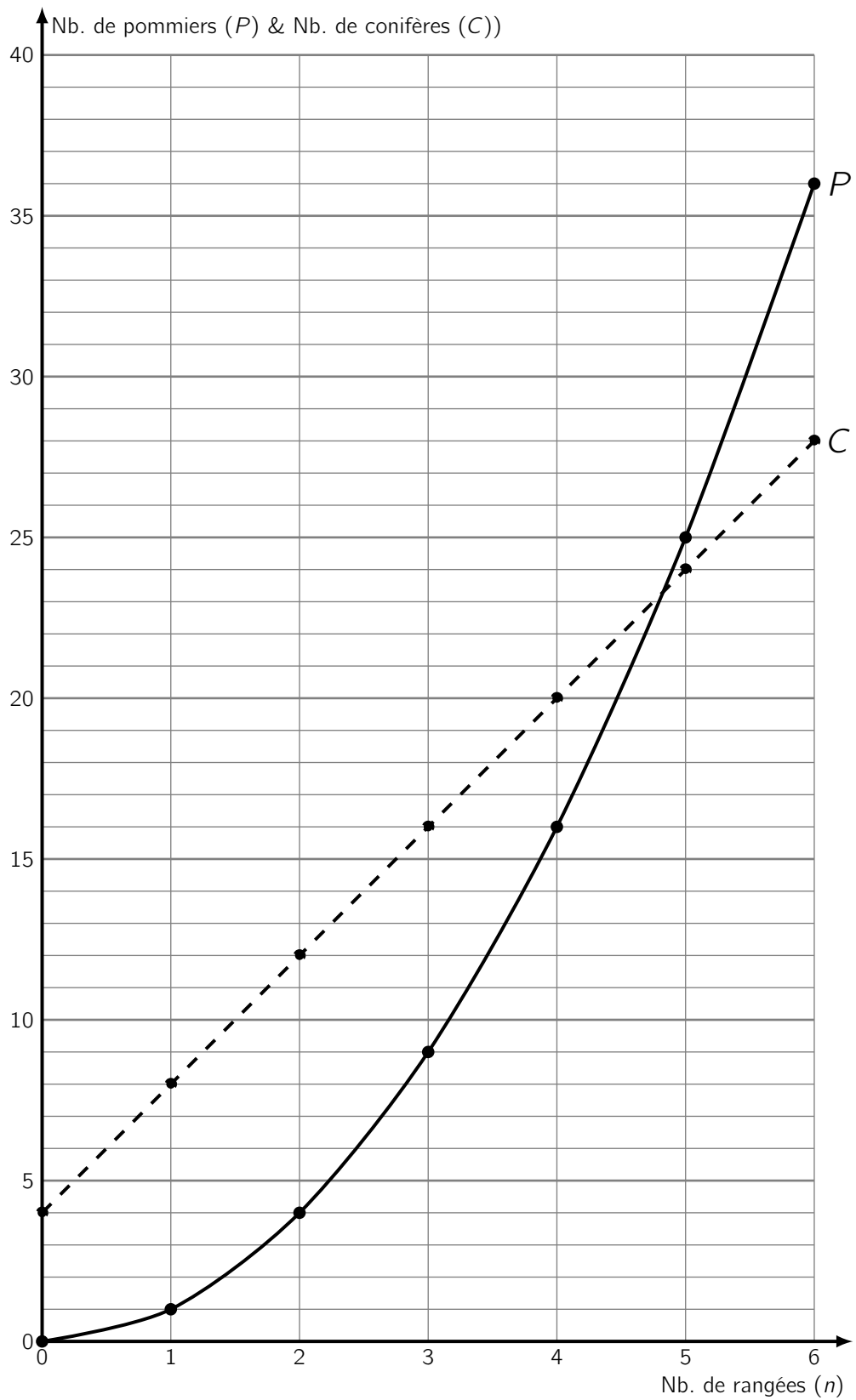
Vérifions par calcul : $P(5) = 25$ et $C(5) = 24$

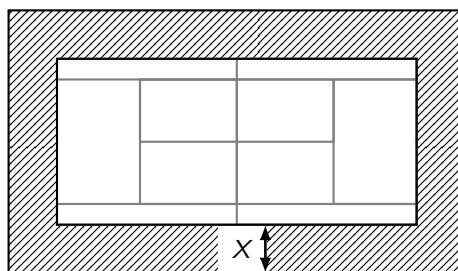
Donc, s'il y a 5 rangées, il y aura plus de pommiers que de conifères.

Pour nous rassurer : $P(4) = 16$ et $C(4) = 20$

S'il n'y a que 4 rangées, il y aura moins de pommiers que de conifères. C'est donc bien la valeur de 5 qu'il fallait choisir.

On peut vérifier cela graphiquement (cf. page suivante).

Exercice 5 (4.) suite

Exercice 6


Voici un terrain de tennis standard dont les dimensions sont de 23,77 m de long pour 10,97 m de large. Je souhaite construire une zone pour les ramasseurs de balles, autour du terrain, de largeur constante x et dont l'aire est égale à celle du terrain.

Calculer la largeur x de cette zone.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{hachurée}} &= A_{\text{totale}} - A_{\text{terrain}} \\
 &= (23,77 + 2x) \cdot (10,97 + 2x) - 260,7569 \\
 &= 23,77 \cdot 10,97 + 23,77 \cdot 2x + 2x \cdot 10,97 + 4x^2 - 260,7569 \\
 &= 4x^2 + 47,54x + 21,94x \\
 &= 4x^2 + 69,48x
 \end{aligned}$$

$$A_{\text{hachurée}} = A_{\text{terrain}}$$

$$4x^2 + 69,48x = 260,7569$$

$$4x^2 + 69,48x - 260,7569 = 0$$

$$x = \frac{-69,48 \pm \sqrt{69,48^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-260,7569)}}{2 \cdot 4}$$

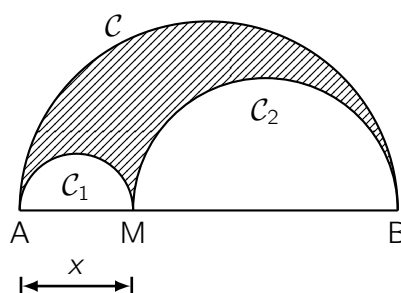
$$x = \frac{-69,48 \pm \sqrt{4827,4704 + 4172,1104}}{8}$$

$$x = \frac{-69,48 \pm \sqrt{8999,5808}}{8}$$

$$x = \begin{cases} -20,54 & \rightarrow \text{à rejeter} \\ 3,17 \end{cases}$$

La largeur est donc de 3,17 mètres.

Exercice 7 (partie 1)



$[AB]$ est un segment, $AB=10$ cm.

$\mathcal{C}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est un point de $[AB]$.

$\mathcal{C}_1$ est le demi-cercle de diamètre $[AM]$. $\mathcal{C}_2$ est le demi-cercle de diamètre $[MB]$.

Le domaine hachuré s'appelle un arbel.

On demande d'étudier les variations de l'aire de l'arbel lorsque M parcourt $[AB]$.

Indice : Déterminer la formule de l'aire de l'arbel en fonction de la distance AM (que l'on appellera x par facilité).

$$[AB] = 10$$

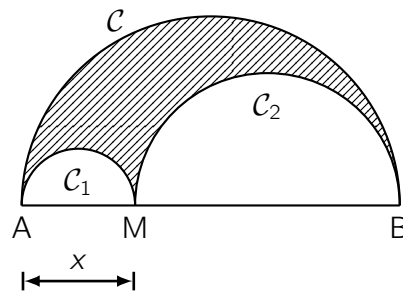
$$[AM] = x$$

$$A_C = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{2}$$

$$A_{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{\pi x^2}{8}$$

$$A_{C_2} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{(10-x)^2}{4} = \frac{\pi}{8} \cdot (100 - 20x + x^2)$$

Exercice 7 (partie 2)



$$A_{arbel} = A_C - A_{C1} - A_{C2}$$

$$= \frac{25\pi}{2} - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (100 - 20x + x^2)$$

$$= \frac{100\pi}{8} - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (100 - 20x + x^2)$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot (100 - x^2 - 100 + 20x - x^2)$$

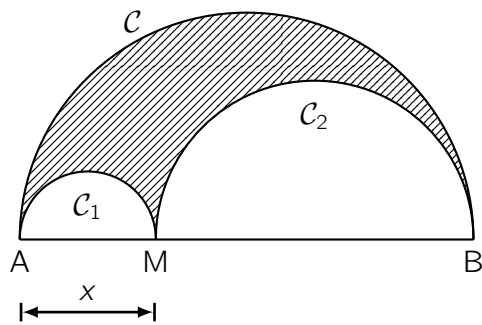
$$= \frac{\pi}{8} \cdot (-2x^2 + 20x)$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot 2 \cdot (-x^2 + 10x)$$

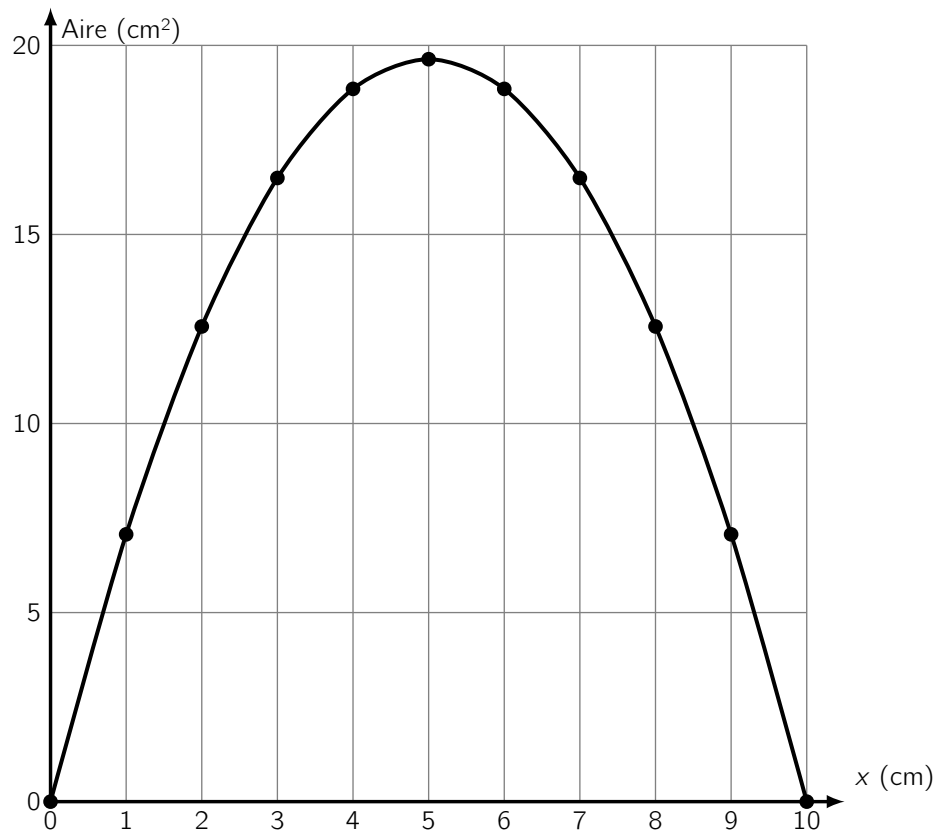
$$= \frac{\pi}{4} \cdot (-x^2 + 10x)$$

$$= \frac{-\pi}{4} \cdot (x^2 - 10x)$$

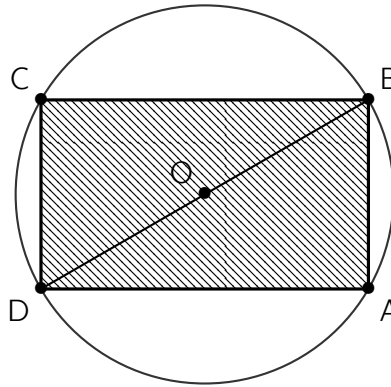
Exercice 7 (partie 3)



x	Aire de l'arbel
0	0,0000
1	7,0686
2	12,5664
3	16,4934
4	18,8496
5	19,6350
6	18,8496
7	16,4934
8	12,5664
9	7,0686
10	0,0000



Exercice 8



Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm inscrit dans un cercle de 13 cm de diamètre.

$$\text{Périmètre}_{\text{rect}} = 34 \text{ cm}$$

$$\text{Diamètre}_{\text{cercle}} = 13 \text{ cm}$$

$$\begin{cases} 2L + 2\ell = 34 & (1) \\ L^2 + \ell^2 = 13^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow L = \frac{34 - 2\ell}{2} = 17 - \ell$$

$$(2) \rightarrow (1) \rightarrow (17 - \ell)^2 + \ell^2 = 13^2$$

$$289 - 34\ell + \ell^2 + \ell^2 = 169$$

$$2\ell^2 - 34\ell + 120 = 0$$

$$\ell = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60}}{2}$$

$$\ell = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2}$$

$$\ell = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\ell = \frac{17 \pm 7}{2}$$

$$\ell = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

$$\text{Si } \ell = 12 \rightarrow L = 17 - \ell = 17 - 12 = 5$$

$$\text{Si } \ell = 5 \rightarrow L = 17 - \ell = 17 - 5 = 12$$

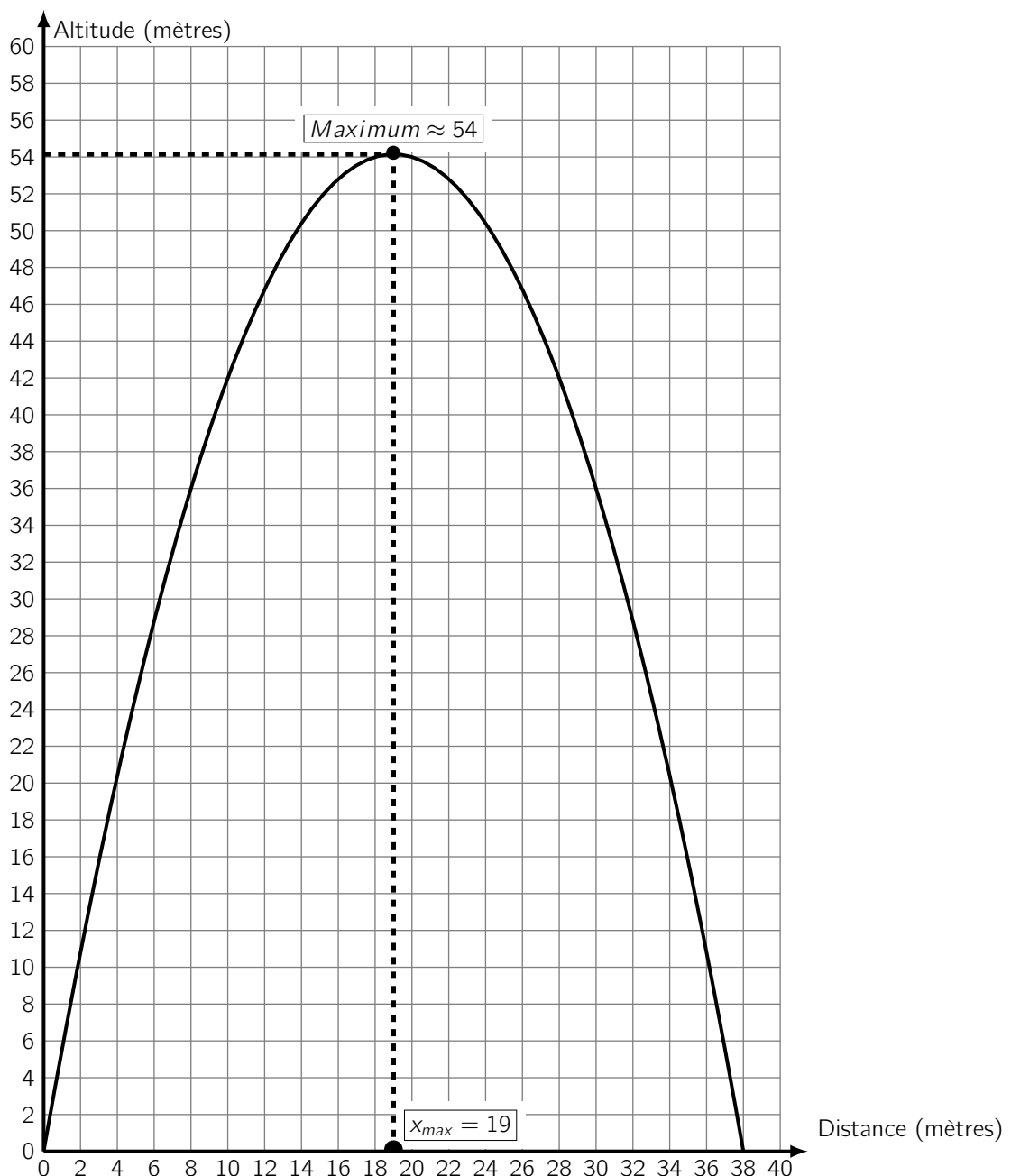
Les dimensions du rectangle sont donc de 5 cm par 12 cm.

Exercice 9 (1. et 2.)

Lors d'un feu d'artifice, chaque fusée explose quand elle atteint, au cours de sa trajectoire, sa hauteur maximale.

La trajectoire d'une fusée pyrotechnique peut être modélisée par la fonction suivante : $f(x) = -0,15x^2 + 5,7x$ (L'unité est le mètre.)

1. Réaliser le graphe de la fonction ci-dessus ;
2. Déterminer graphiquement le maximum de la fonction $f(x)$ ainsi que son x_{max} correspondant ;



Exercice 9 (3. et 4.)

3. Vérifier par le calcul les résultats obtenus au point précédent ;

La fonction $f(x) = -0,15x^2 + 5,7x$ est une fonction du second degré (une parabole).

La coordonnée x du sommet de la parabole est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}x_{max} &= \frac{-b}{2a} \\&= \frac{-5,7}{2 \cdot (-0,15)} \\&= 19\end{aligned}$$

Et la coordonnée y du sommet de la parabole est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}f(x_{max}) &= f(19) \\&= -0,15 \cdot 19^2 + 5,7 \cdot 19 \\&= 54,15\end{aligned}$$

4. À quelle hauteur la fusée explose-t-elle ?

Selon l'énoncé, la fusée pyrotechnique explose lorsqu'elle atteint sa hauteur maximale.

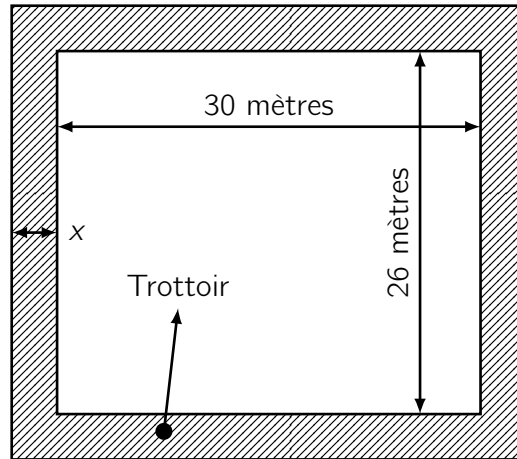
Les résultats des calculs précédents nous donnent une coordonnée y du sommet de la parabole de 54,15.

La hauteur à laquelle la fusée explose est donc de 54,15 mètres.

Exercice 10

Un terrain rectangulaire de 26 mètres sur 30 mètres est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2 , quelle est sa largeur ?

Commençons par réaliser un schéma.



$$\begin{aligned}
 A_{\text{trottoir}} &= A_{\text{totale}} - A_{\text{terrain}} \\
 &= (30 + 2x) \cdot (26 + 2x) - 30 \cdot 26 \\
 &= 780 + 60x + 52x + 4x^2 - 780 \\
 &= 4x^2 + 112x
 \end{aligned}$$

$$4x^2 + 112x = 240$$

$$4x^2 + 112x - 240 = 0$$

$$x = \frac{-112 \pm \sqrt{112^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-240)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{-112 \pm \sqrt{12544 + 3840}}{8}$$

$$x = \frac{-112 \pm \sqrt{16384}}{8}$$

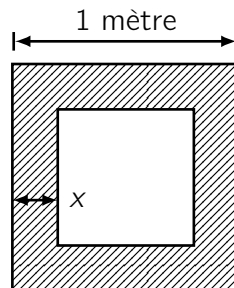
$$x = \frac{-112 \pm 128}{8}$$

$$x = \begin{cases} -30 \\ 2 \end{cases} \rightarrow \text{à rejeter}$$

La largeur du trottoir est de 2 mètres.

Exercice 11

Le grand carré est de côté 1 mètre. Déterminer la largeur constante de la bande hachurée, sachant qu'elle a la même aire que le carré blanc intérieur.



$$\begin{aligned}
 A_{\text{hachurée}} &= A_{\text{totale}} - A_{\text{blanche}} \\
 &= 1 \cdot 1 - (1 - 2x) \cdot (1 - 2x) \\
 &= 1 - (1 - 2x)^2 \\
 &= 1 - (1 - 4x + 4x^2) \\
 &= -4x^2 + 4x
 \end{aligned}$$

$$A_{\text{hachurée}} = A_{\text{blanche}} = 0,5$$

$$-4x^2 + 4x = 0,5$$

$$-4x^2 + 4x - 0,5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-0,5)}}{2 \cdot (-4)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{-8}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-8}$$

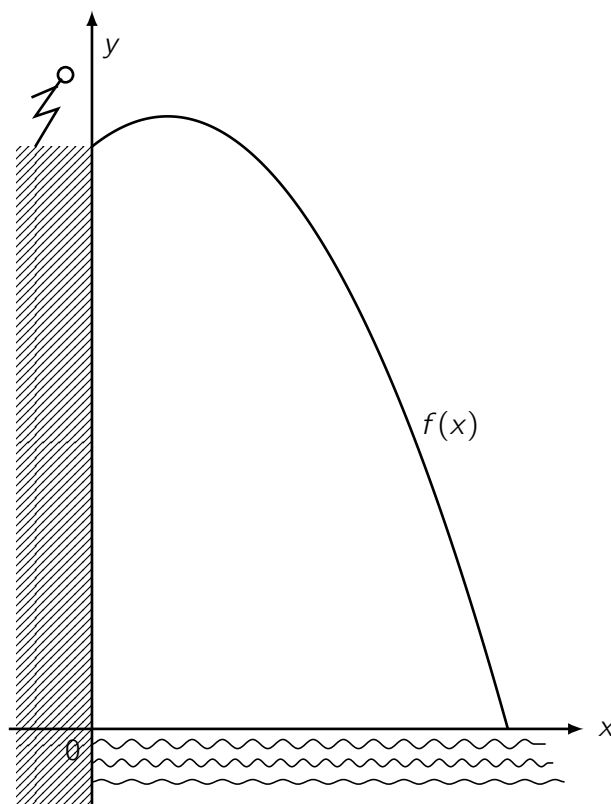
$$x = \begin{cases} 0,853... & \rightarrow \text{à rejeter} \\ 0,146... \end{cases}$$

La largeur hachurée est de 0,146... mètres.

Exercice 12 (1.)

Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par une parabole qui, dans le repère ci-dessous, est la représentation graphique de la fonction $f(x)$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -0,2x^2 + 0,8x + 15,4$$



L'unité utilisée est le mètre.

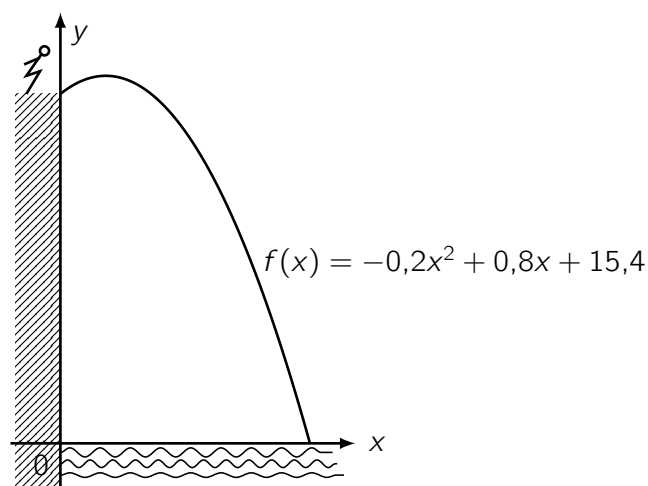
$f(x)$ désigne ainsi la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètres.

1. Quelle est la hauteur de la falaise ?

On la détermine en regardant l'ordonnée à l'origine de la fonction ou en calculant $f(0)$.

La hauteur de la falaise est de 15,4 mètres.

Exercice 12 (2. et 3.)



2. À quelle distance de la falaise le plongeur touche-t-il la surface de l'eau ?

$$\begin{aligned}
 -0,2x^2 + 0,8x + 15,4 &= 0 \\
 x &= \frac{-0,8 \pm \sqrt{(0,8)^2 - 4 \cdot (-0,2) \cdot 15,4}}{2 \cdot (-0,2)} \\
 x &= \frac{-0,8 \pm \sqrt{0,64 + 12,32}}{-0,4} \\
 x &= \frac{-0,8 \pm \sqrt{12,96}}{-0,4} \\
 x &= \begin{cases} -7 & \rightarrow \text{à rejeter} \\ 11 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le plongeur touche la surface de l'eau à 11 mètres de la falaise.

3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ? La hauteur maximale correspond à la coordonnée y du sommet de la parabole :

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{-b}{2a} = \frac{-0,8}{2 \cdot (-0,2)} = \frac{-0,8}{-0,4} = 2 \\
 f(2) &= -0,2 \cdot 2^2 + 0,8 \cdot 2 + 15,4 \\
 f(2) &= -0,8 + 1,6 + 15,4 \\
 &= 16,2
 \end{aligned}$$

La hauteur maximale atteinte par le plongeur est de 16,2 mètres.

Exercice 13

Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles 5 cm plus longues et 5 cm plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir la même surface du sol. Quelles sont les dimensions des premières dalles ?

$$500x^2 = 320 \cdot (x + 5)^2$$

$$500x^2 = 320 \cdot (x^2 + 10x + 25)$$

$$500x^2 = 320x^2 + 3200x + 8000$$

$$500x^2 - 320x^2 - 3200x - 8000 = 0$$

$$180x^2 - 3200x - 8000 = 0$$

$$18x^2 - 320x - 800 = 0$$

$$9x^2 - 160x - 400 = 0$$

$$x = \frac{-(-160) \pm \sqrt{(-160)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-400)}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{25600 + 14400}}{18}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{40000}}{18}$$

$$x = \frac{160 \pm 200}{18}$$

$$x = \begin{cases} -2,2... & \rightarrow \text{à rejeter} \\ 20 \end{cases}$$

La largeur des premières dalles est de 20 cm de côté.