

## Chapitre 5

### Exercice 1

Lors d'une étude de la qualité des eaux destinées à la consommation, on analyse le contenu de soixante flacons dont on détermine la concentration en nitrates en mg/l. Résultats de l'analyse :

| Concentration<br>(mg/l) | 45,8 | 46,6 | 47,0 | 47,5 | 48,2 | 49,2 | 49,5 | 50,0 | 50,1 | 50,2 |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Nb. flacons             | 1    | 9    | 2    | 10   | 9    | 10   | 7    | 7    | 3    | 2    |

1. Déterminer le mode, la moyenne et l'écart-type.

Il s'agit d'une série bimodale :  $Mo_1 = 47,5$  et  $Mo_2 = 49,2$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 45,8 + 9 \cdot 46,6 + \dots + 2 \cdot 50,2}{60} = \frac{2907,2}{60} = 48,45\bar{3} \text{ mg/l}$$

Pour l'écart-type ( $\sigma$ ) : voir pages suivantes

2. Calculer la médiane.

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ |
|-------|-------|-------|
| 45,8  | 1     | 1     |
| 46,6  | 9     | 10    |
| 47    | 2     | 12    |
| 47,5  | 10    | 22    |
| 48,2  | 9     | 31    |
| 49,2  | 10    | 41    |
| 49,5  | 7     | 48    |
| 50    | 7     | 55    |
| 50,1  | 3     | 58    |
| 50,2  | 2     | 60    |

$$Me = 48,2 \text{ mg/l}$$

3. Pour que l'eau soit propre à la consommation, sa concentration en nitrates doit être inférieure ou égale à 50 mg/l. Quel est le pourcentage de flacons contenant de l'eau impropre à la consommation ?

$$f_{\text{flacons d'eau impropre}} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8,33\%$$

### Exercice 1 - Suite

Pour montrer de manière chiffrée l'équivalence des deux formules, il sera fait (à titre de simple comparaison) deux fois le calcul de l'écart-type.

#### Premier calcul de l'écart-type

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

\* La moyenne est de : 48,453

\* Tableau :

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-------|-----------------|---------------------|-------------------------------|
| 45,8  | 1     | -2,66           | 7,0756              | 7,0756                        |
| 46,6  | 9     | -1,86           | 3,4596              | 31,1364                       |
| 47    | 2     | -1,46           | 2,1316              | 4,2632                        |
| 47,5  | 10    | -0,96           | 0,9216              | 9,216                         |
| 48,2  | 9     | -0,26           | 0,0676              | 0,6084                        |
| 49,2  | 10    | 0,74            | 0,5476              | 5,476                         |
| 49,5  | 7     | 1,04            | 1,0816              | 7,5712                        |
| 50    | 7     | 1,54            | 2,3716              | 16,6012                       |
| 50,1  | 3     | 1,64            | 2,6896              | 8,0688                        |
| 50,2  | 2     | 1,74            | 3,0276              | 6,0552                        |

\* Somme des  $n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$  : 96,072

\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{60} \cdot 96,072 = 1,6012$

\* Écart-type :  $\sigma = 1,265...$

**Exercice 1 - Suite****Second calcul de l'écart-type**

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

\* La moyenne est de : 48,453

\* Tableau :

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i^2$ | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|---------|-------------|
| 45,8  | 1     | 2097,64 | 2097,64     |
| 46,6  | 9     | 2171,56 | 19544,04    |
| 47    | 2     | 2209    | 4418        |
| 47,5  | 10    | 2256,25 | 22562,5     |
| 48,2  | 9     | 2323,24 | 20909,16    |
| 49,2  | 10    | 2420,64 | 24206,4     |
| 49,5  | 7     | 2450,25 | 17151,75    |
| 50    | 7     | 2500    | 17500       |
| 50,1  | 3     | 2510,01 | 7530,03     |
| 50,2  | 2     | 2520,04 | 5040,08     |

\* Somme des  $n_i x_i^2$  : 140 959,6

\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{60} \cdot 140\,959,6 - 48,453^2 = 1,60115$

\* Écart-type :  $\sigma = 1,265...$

**Exercice 2.**

Une auberge de jeunesse a effectué une étude sur sa fréquentation au mois d'août sur deux-cents personnes.

Le relevé des durées de séjour a donné les résultats suivants :

| Nb jours      | 1    | 2    | 3    | 4   | 5   |
|---------------|------|------|------|-----|-----|
| Fréquence (%) | 28,0 | 31,5 | 29,0 | 7,5 | 4,0 |

Déterminer le mode, la moyenne, la médiane et l'écart-type.

$Mo = 2$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 28 + 2 \cdot 31,5 + \dots + 5 \cdot 4}{100} = \frac{228}{100} = 2,28 \text{ jours}$$

Médiane :

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|-------|-------|-------|
| 1     | 28    | 28    |
| 2     | 31,5  | 59,5  |
| 3     | 29    | 88,5  |
| 4     | 7,5   | 96    |
| 5     | 4     | 100   |

$Me = 2 \text{ jours}$

Pour l'écart-type ( $\sigma$ ) : voir page suivante

**Exercice 2 - Suite****Calcul de l'écart-type**

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

\* La moyenne est de : 2,28

\* Tableau :

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i^2$ | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|---------|-------------|
| 1     | 56    | 1       | 56          |
| 2     | 63    | 4       | 252         |
| 3     | 58    | 9       | 522         |
| 4     | 15    | 16      | 240         |
| 5     | 8     | 25      | 200         |

\* Somme des  $n_i x_i^2$  : 1 270

\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{200} \cdot 1\,270 - 2,28^2 = 1,151\,6$

\* Calcul de  $\sigma$  :  $\sigma = 1,073\,126\dots$

### Exercice 3

Le tableau suivant donne la répartition des voyagistes français (en 1990) selon leur taille en flux de vacanciers dans le marché métropolitain français. Cette étude ne concerne que les voyagistes ayant transporté plus de 15 000 personnes dans l'année.

| Nb vacanciers<br>(milliers) | $[15;25[$ | $[25;50[$ | $[50;75[$ | $[75;100[$ | $[100;150[$ | $[150;200[$ | $[200;500[$ |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|-------------|
| Nb voyagistes               | 26        | 44        | 7         | 9          | 5           | 0           | 9           |

Avant de répondre aux questions : faire un tableau.

| Nb vacanciers<br>(milliers) | Nb voyagistes | $N_i$ | $f_i(\%)$ | $F_i(\%)$ |
|-----------------------------|---------------|-------|-----------|-----------|
| $[15;25[$                   | 26            | 26    | 26        | 26        |
| $[25;50[$                   | 44            | 70    | 44        | 70        |
| $[50;75[$                   | 7             | 77    | 7         | 77        |
| $[75;100[$                  | 9             | 86    | 9         | 86        |
| $[100;150[$                 | 5             | 91    | 5         | 91        |
| $[150;200[$                 | 0             | 91    | 0         | 91        |
| $[200;500[$                 | 9             | 100   | 9         | 100       |

1. Déterminer : population et caractère.

Population : voyagistes français en 1990

Caractère : nombre de vacanciers

2. Déterminer le pourcentage de voyagistes dont le flux de vacanciers fut :

\* inférieur à 50 000 (70 %)

\* compris entre 20 000 et 50 000 (57 %)

**Exercice 3 - suite**3. Calculer  $\bar{x}$  et  $\sigma$ 

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 26 + 37,5 \cdot 44 + \dots + 350 \cdot 9}{100} = \frac{7170}{100} \rightarrow 71,70 \text{ vacanciers}$$

**Calcul de l'écart-type**

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

\* La moyenne est de : 71,70

\* Tableau :

| Classes     | $x_i$ | $n_i$ | $x_i^2$  | $n_i x_i^2$ |
|-------------|-------|-------|----------|-------------|
| [15 ; 25[   | 20    | 26    | 400      | 10 400      |
| [25 ; 50[   | 37,5  | 44    | 1 406,25 | 61 875      |
| [50 ; 75[   | 62,5  | 7     | 3 906,25 | 27 343,75   |
| [75 ; 100[  | 87,5  | 9     | 7 656,25 | 68 906,25   |
| [100 ; 150[ | 125   | 5     | 15 625   | 78 125      |
| [150 ; 200[ | 175   | 0     | 30 625   | 0           |
| [200 ; 500[ | 350   | 9     | 122 500  | 1 102 500   |

\* Somme des  $n_i x_i^2$  : 1 349 150\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{100} \cdot 1\,349\,150 - 71,70^2 = 8\,350,61$ \* Calcul de  $\sigma$  :  $\sigma = \sqrt{8\,350,61} = 91,381\,672\dots$  $\rightarrow \sigma \approx 91\,382$  vacanciers

4. Déterminer le mode.

Classe modale : [25; 50[

 $Mo = 37,5 \rightarrow 37\,500$  vacanciers

### Exercice 3 - suite

5. Calculer la médiane.

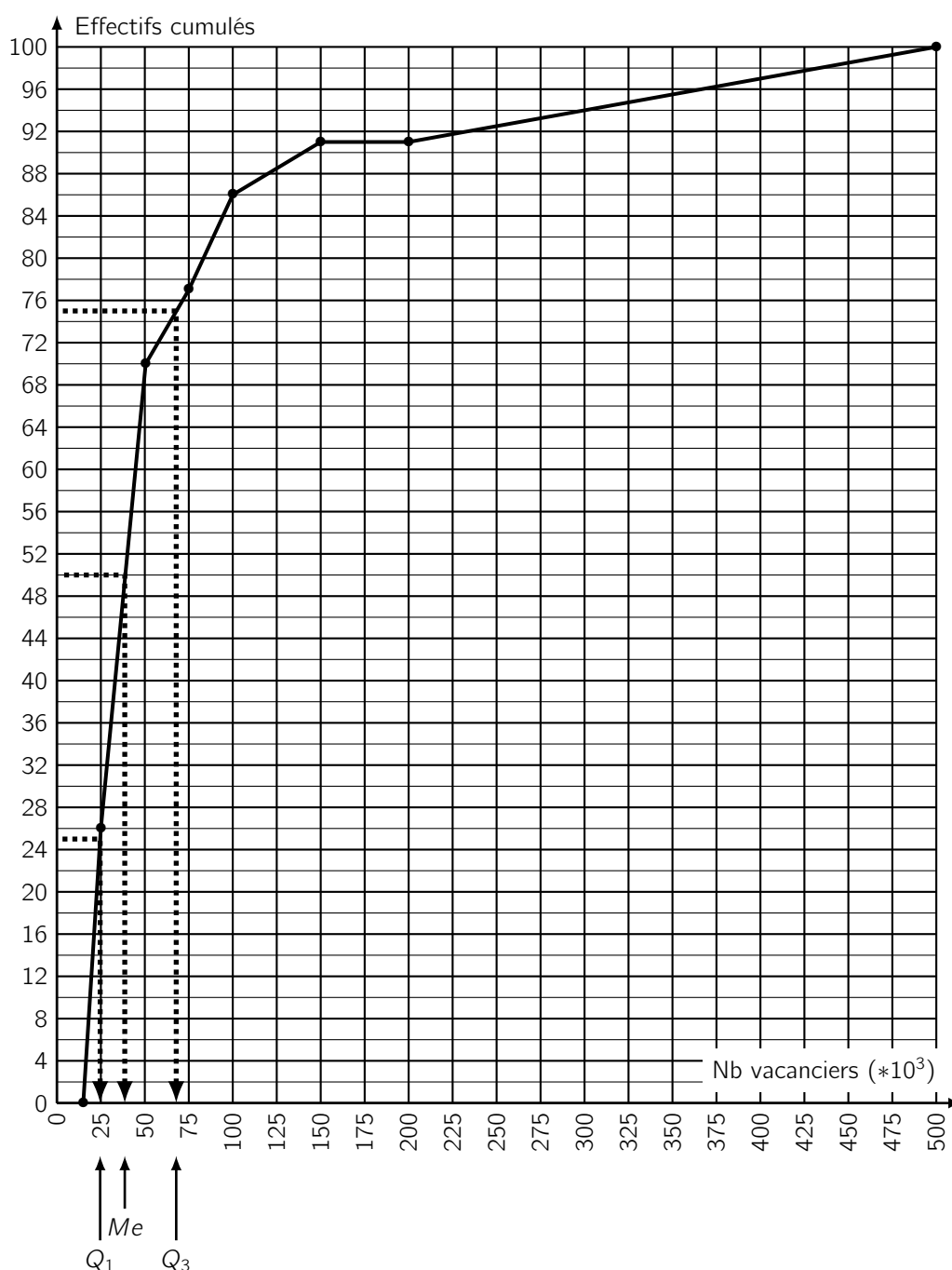
Classe médiane :  $[25; 50[$

$$Me = 25 + \frac{25}{44} \cdot \left( \frac{100}{2} - 26 \right) = 38,6363... \rightarrow Me \approx 38\,636 \text{ vacanciers}$$

6. Calculer les premier et troisième quartiles ; ensuite vérifier les valeurs obtenues pour  $Me$ ,  $Q_1$  et  $Q_3$  sur un graphique.

$$Q_1 = 15 + \frac{10}{26} \cdot \left( \frac{100}{4} - 0 \right) = 24,6153... \rightarrow Q_1 \approx 24\,615 \text{ vacanciers}$$

$$Q_3 = 50 + \frac{25}{7} \cdot \left( \frac{3 \cdot 100}{4} - 70 \right) = 67,8571... \rightarrow Q_3 \approx 67\,857 \text{ vacanciers}$$



### Exercice 3 - suite

7. Calculer l'intervalle interquartile.

L'intervalle interquartile :  $[24,6...; 67,8...]$

→ longueur  $\approx 43\,241$  personnes

8. Déterminer l'étendue de la série.

L'étendue de la série :  $[15; 500[$

→ longueur =  $485\,000$  personnes

9. Déterminer le pourcentage de voyageurs dont le flux de vacanciers fut supérieur à la moyenne.

Rappel :  $\bar{x} = 71,7$   
 $0,924$

$$(P = \overbrace{(7/25)}^{0,924} \cdot 3,3 + 9 + 5 + 0 + 9 = 23,924 \%)$$

### Exercice 4

L'âge au 1<sup>er</sup> janvier 1991 du personnel d'une entreprise liégeoise est repris dans le tableau suivant :

| Âge des salariés | $[20;25[$ | $[25;30[$ | $[30;35[$ | $[35;40[$ | $[40;45[$ | $[45;50[$ | $[50;55[$ | $[55;60[$ | $[60;65[$ |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Hommes           | 10        | 26        | 44        | 52        | 38        | 20        | 17        | 7         | 0         |
| Femmes           | 0         | 0         | 3         | 14        | 14        | 6         | 11        | 2         | 0         |

1. Déterminer  $Mo_H$ ,  $Mo_F$  et  $Mo_{H+F}$ .
2. Calculer  $\bar{x}_H$ ,  $\bar{x}_F$  et  $\bar{x}_{H+F}$ .
3. Déterminer  $Me_H$ ,  $Me_F$  et  $Me_{H+F}$ .
4. Calculer  $\sigma_H$ ,  $\sigma_F$  et  $\sigma_{H+F}$ .
5. Calculer les intervalles interquartiles pour les H, les F et les H+F.

Premièrement : faire le tableau :

| Âge des salariés | $[20;25[$ | $[25;30[$ | $[30;35[$ | $[35;40[$ | $[40;45[$ | $[45;50[$ | $[50;55[$ | $[55;60[$ | $[60;65[$ |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Centres          | 22,5      | 27,5      | 32,5      | 37,5      | 42,5      | 47,5      | 52,5      | 57,5      | 62,5      |
| Hommes           | 10        | 26        | 44        | 52        | 38        | 20        | 17        | 7         | 0         |
| H cumul.         | 10        | 36        | 80        | 132       | 170       | 190       | 207       | 214       | 214       |
| Femmes           | 0         | 0         | 3         | 14        | 14        | 6         | 11        | 2         | 0         |
| F cumul.         | 0         | 0         | 3         | 17        | 31        | 37        | 48        | 50        | 50        |
| H + F            | 10        | 26        | 47        | 66        | 52        | 26        | 28        | 9         | 0         |
| H + F cumul.     | 10        | 36        | 83        | 149       | 201       | 227       | 255       | 264       | 264       |

**Exercice 4 - suite**

1. Déterminer  $Mo_H$ ,  $Mo_F$  et  $Mo_{H+F}$ .

$$Mo_H = 37,5$$

$$Mo_{F-1} = 37,5 \text{ et } Mo_{F-2} = 42,5$$

$$Mo_{H+F} = 37,5.$$

2. Calculer  $\bar{x}_H$ ,  $\bar{x}_F$  et  $\bar{x}_{H+F}$ .

$$\bar{x}_H = \frac{22,5 \cdot 10 + 27,5 \cdot 26 + \dots + 62,5 \cdot 0}{214} = \frac{8180}{214} = 38,2 \text{ ans}$$

$$\bar{x}_F = \frac{22,5 \cdot 0 + 27,5 \cdot 0 + 32,5 \cdot 3 + \dots + 62,5 \cdot 0}{50} = \frac{2195}{50} = 43,9 \text{ ans}$$

$$\bar{x}_{H+F} = \frac{22,5 \cdot 10 + 27,5 \cdot 36 + \dots + 62,5 \cdot 0}{264} = \frac{10375}{264} = 39,3 \text{ ans}$$

3. Déterminer  $Me_H$ ,  $Me_F$  et  $Me_{H+F}$ .

$$Me_H = 35 + \frac{5}{52} \cdot \left( \frac{214}{2} - 80 \right) = 37,596\dots$$

$$Me_F = 35 + \frac{5}{14} \cdot \left( \frac{50}{2} - 3 \right) = 42,857\dots$$

$$Me_{H+F} = 35 + \frac{5}{66} \cdot \left( \frac{264}{2} - 83 \right) = 38,712\dots$$

4. Calculer  $\sigma_H$ ,  $\sigma_F$  et  $\sigma_{H+F}$ .

Voir pages suivantes.

5. Calculer les intervalles interquartiles pour les H, les F et les H+F.

$$[Q_1; Q_3]_H = [31,988\dots; 43,75]_H (\approx 11,76) \text{ avec :}$$

$$Q_1 = 30 + \frac{5}{44} \cdot \left( \frac{214}{4} - 36 \right) = 31,988\dots$$

$$Q_3 = 40 + \frac{5}{38} \cdot \left( \frac{3 \cdot 214}{4} - 132 \right) = 43,75$$

$$[Q_1; Q_3]_F = [38,392\dots; 50,227\dots]_F (\approx 11,83) \text{ avec :}$$

$$Q_1 = 35 + \frac{5}{14} \cdot \left( \frac{50}{4} - 3 \right) = 38,392\dots$$

$$Q_3 = 50 + \frac{5}{11} \cdot \left( \frac{3 \cdot 50}{4} - 37 \right) = 50,227\dots$$

$$[Q_1; Q_3]_{H+F} = [33,191\dots; 44,711\dots]_{H+F} (\approx 11,52) \text{ avec :}$$

$$Q_1 = 30 + \frac{5}{47} \cdot \left( \frac{264}{4} - 36 \right) = 33,191\dots$$

$$Q_3 = 40 + \frac{5}{52} \cdot \left( \frac{3 \cdot 264}{4} - 149 \right) = 44,711\dots$$

**Exercice 4 - Suite****Calcul de l'écart-type (H)**

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

\* La moyenne est de :  $\frac{8180}{214} = 38,2...$

\* Tableau :

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i^2$  | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|----------|-------------|
| 22,5  | 10    | 506,25   | 5 062,5     |
| 27,5  | 26    | 756,25   | 19 662,5    |
| 32,5  | 44    | 1 056,25 | 46 475      |
| 37,5  | 52    | 1 406,25 | 73 125      |
| 42,5  | 38    | 1 806,25 | 68 637,5    |
| 47,5  | 20    | 2 256,25 | 45 125      |
| 52,5  | 17    | 2 756,25 | 46 856,25   |
| 57,5  | 7     | 3 306,25 | 23 143,75   |
| 62,5  | 0     | 3 906,25 | 0           |

\* Somme des  $n_i x_i^2$  : 328 087,5

\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{214} \cdot 328\,087,5 - \left( \frac{8180}{214} \right)^2 = 73,879...$

\* Calcul de  $\sigma$  :  $\sigma_H = 8,595\,298...$

**Exercice 4 - Suite****Calcul de l'écart-type (F)**

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

\* La moyenne est de :  $\frac{2195}{50} = 43,9$

\* Tableau :

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i^2$  | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|----------|-------------|
| 22,5  | 0     | 506,25   | 0           |
| 27,5  | 0     | 756,25   | 0           |
| 32,5  | 3     | 1 056,25 | 3 168,75    |
| 37,5  | 14    | 1 406,25 | 19 687,5    |
| 42,5  | 14    | 1 806,25 | 25 287,5    |
| 47,5  | 6     | 2 256,25 | 13 537,5    |
| 52,5  | 11    | 2 756,25 | 30 318,75   |
| 57,5  | 2     | 3 306,25 | 6 612,5     |
| 62,5  | 0     | 3 906,25 | 0           |

\* Somme des  $n_i x_i^2$  : 98 612,5

\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{50} \cdot 98\,612,5 - \left( \frac{2195}{50} \right)^2 = 45,04$

\* Calcul de  $\sigma$  :  $\sigma_F = 6,711\,184...$

**Exercice 4 - Suite****Calcul de l'écart-type (H+F)**

Formule utilisée : 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

\* La moyenne est de :  $\frac{10375}{264} = 39,2...$

\* Tableau :

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i^2$  | $n_i x_i^2$ |
|-------|-------|----------|-------------|
| 22,5  | 10    | 506,25   | 5 062,5     |
| 27,5  | 26    | 756,25   | 19 662,5    |
| 32,5  | 47    | 1 056,25 | 49 643,75   |
| 37,5  | 66    | 1 406,25 | 92 812,5    |
| 42,5  | 52    | 1 806,25 | 93 925      |
| 47,5  | 26    | 2 256,25 | 58 662,5    |
| 52,5  | 28    | 2 756,25 | 77 175      |
| 57,5  | 9     | 3 306,25 | 29 756,25   |
| 62,5  | 0     | 3 906,25 | 0           |

\* Somme des  $n_i x_i^2$  : 426 700

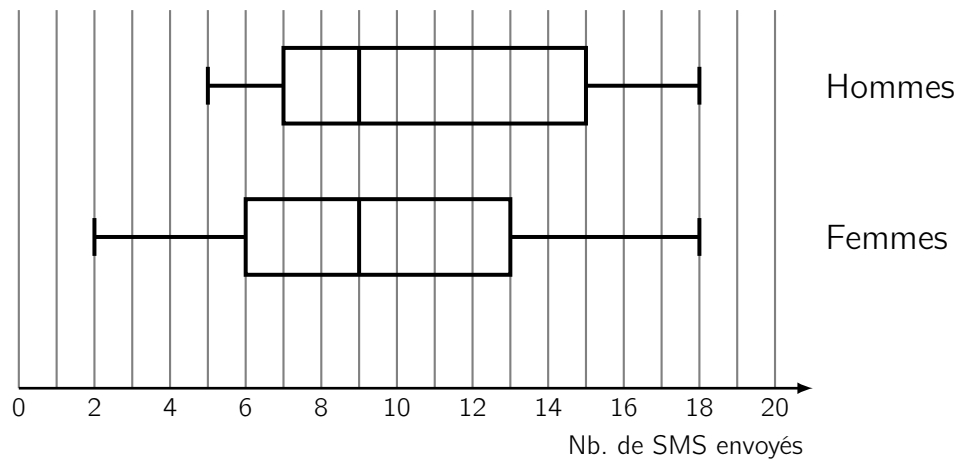
\* Calcul de  $\sigma^2$  :  $\sigma^2 = \frac{1}{264} \cdot 426\,700 - \left( \frac{10375}{264} \right)^2 = 71,857...$

\* Calcul de  $\sigma$  :  $\sigma_{H+F} = 8,476...$

### Exercice 5

On demande à un groupe de personnes le nombre de SMS envoyés en une journée.

Les résultats sont synthétisés par le diagramme ci-dessous :



1. Complète le tableau suivant :

|                                 | Hommes | Femmes |
|---------------------------------|--------|--------|
| Valeur minimale                 | 5      | 2      |
| Valeur maximale                 | 18     | 18     |
| Valeur de la médiane            | 9      | 9      |
| Valeur de $Q_1$                 | 7      | 6      |
| Valeur de $Q_3$                 | 15     | 13     |
| Valeur de l'écart interquartile | 8      | 7      |
| Valeur de l'étendue             | 13     | 16     |

La suite de l'exercice se trouve page suivante...

2. Vrai ou faux ? Place une croix dans la case correspondante.

|                                                                        | <b>VRAI</b> | <b>FAUX</b> |
|------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|
| La moitié des femmes a envoyé plus de 9 SMS en une journée.            | X           |             |
| 10 % des hommes ont envoyé entre 5 et 7 SMS.                           |             | X           |
| En moyenne, les hommes et les femmes ont envoyé le même nombre de SMS. |             | X           |
| La moitié des femmes a envoyé entre 6 et 13 SMS en une journée.        | X           |             |
| 50 % des hommes ont envoyé entre 9 et 18 SMS sur la journée.           | X           |             |
| Un quart des hommes a envoyé entre 15 et 18 SMS.                       | X           |             |
| Un quart des femmes a envoyé entre 6 et 9 SMS.                         | X           |             |