

Chapitre 2 – 6^e

Exercice 1

Sachant que $u_8 = \frac{125}{32}$ et $q = \frac{-1}{2}$,

1. Calculer le terme u_0
2. Exprimer u_n en fonction de n .

$$\begin{aligned}u_8 &= u_0 \cdot q^8 \\ \frac{125}{32} &= u_0 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^8 \\ \frac{125}{32} &= u_0 \cdot \frac{1}{256} \\ \frac{125}{32} \cdot \frac{256}{1} &= u_0 \\ u_0 &= 1000\end{aligned}$$

$$u_n = 1000 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Exercice 2

Sachant que $u_5 = \frac{-81}{32}$ et $q = \frac{3}{2}$,

1. Calculer le terme u_1
2. Exprimer u_n en fonction de n .

$$\begin{aligned}u_5 &= u_1 \cdot q^{5-1} \\ \frac{-81}{32} &= u_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \\ \frac{-81}{32} &= u_1 \cdot \frac{81}{16} \\ \frac{-81}{32} \cdot \frac{16}{81} &= u_1 \\ u_1 &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0 \cdot \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} &= u_0 \\ u_0 &= \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

$$u_n = \frac{-1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Exercice 3

Sachant que $u_7 = 0,512$ et $u_{10} = 4,096$,

1. Calculer la raison q
2. Calculer le terme u_0
3. Exprimer u_n en fonction de n .

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_p \cdot q^{n-p} \\
 4,096 &= 0,512 \cdot q^{10-7} \\
 \frac{4,096}{0,512} &= q^3 \\
 \sqrt[3]{\frac{4,096}{0,512}} &= q \\
 q &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_7 &= u_0 \cdot 2^7 \\
 \frac{0,512}{2^7} &= u_0 \\
 u_0 &= 0,004
 \end{aligned}$$

$$u_n = 0,004 \cdot 2^n$$

Exercice 4

Sachant que $u_0 = 16$ et $u_4 = 81$, calculer la raison q .

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_0 \cdot q^n \\
 81 &= 16 \cdot q^4 \\
 \frac{81}{16} &= q^4 \\
 \sqrt[4]{\frac{81}{16}} &= q \\
 q &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 0,5$,

1. Calculer le terme u_5
2. Calculer la somme des six premiers termes de cette série.

$$u_5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$u_5 = \frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} S &= u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{5+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{64-1}{64}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{63}{64} \cdot \frac{2}{1} \\ S &= \frac{63}{32} \end{aligned}$$

Exercice 6

Sachant que $u_5 = 729$ et $q = -3$,

1. Calculer le terme u_{10}
2. Calculer le terme u_0

$$\begin{aligned} u_{10} &= u_5 \cdot q^{10-5} \\ &= 729 \cdot (-3)^5 \\ &= 729 \cdot (-243) \\ &= -177147 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_5 &= u_0 \cdot q^5 \\ 729 &= u_0 \cdot (-3)^5 \\ \frac{729}{-243} &= u_0 \\ u_0 &= -3 \end{aligned}$$

Exercice 7

Je place un capital de 20 000 € à 5% l'an.

1. De combien disposerais-je après 4 ans ?
2. Et après 10 ans ?

$$\begin{aligned} u_4 &= u_0 \cdot q^4 \\ &= 20000 \cdot (1,05)^4 \\ &= 24310,125 \\ u_4 &= 24\,310,13 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{10} &= 20000 \cdot (1,05)^{10} \\ &= 32577,89253... \\ u_{10} &= 32\,577,89 \text{ €} \end{aligned}$$

Exercice 8

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 3 + 60 + 1\,200 + 24\,000 + 480\,000$$

$$\begin{aligned} S &= u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 3 \cdot \frac{1 - 20^{4+1}}{1 - 20} \\ &= 3 \cdot \frac{1 - 3\,200\,000}{-19} \\ &= 3 \cdot \frac{-3\,199\,999}{-19} \\ &= 3 \cdot 168\,421 \\ S &= 505\,263 \end{aligned}$$

Exercice 9

Calculer la somme des six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 5.

$$\begin{aligned} S &= u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 50 \cdot \frac{1 - 5^6}{1 - 5} \\ &= 50 \cdot \frac{1 - 15\,625}{-4} \\ &= 50 \cdot \frac{-15\,624}{-4} \\ &= 50 \cdot 3\,906 \\ S &= 195\,300 \end{aligned}$$

Exercice 10

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2\,187 + 6\,561$$

$$\begin{aligned} S &= u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 1 \cdot \frac{1 - 3^9}{1 - 3} \\ &= \frac{1 - 19\,683}{-2} \\ &= \frac{-19\,682}{-2} \\ S &= 9\,841 \end{aligned}$$

Exercice 11

Dans une évaluation, se trouve l'énoncé suivant :

« Calculer la somme des dix premiers termes d'une suite géométrique dont $u_0 = -5$ et $u_2 = -45$. »

À la fin de l'évaluation, tu compares ta réponse à celle de ton voisin. Tu as obtenu 73 810 et ton voisin a trouvé -147 620. Qui a raison ? Justifier.

Formule utilisée pour la somme :

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

Ayant besoin de la raison, calculons-la :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 \cdot q^2 \\ -45 &= -5 \cdot q^2 \\ \frac{-45}{-5} &= q^2 \\ q^2 &= 9 \\ q &= \sqrt{9} \end{aligned}$$

$$q = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \text{ATTENTION !}$$

Si $q = 3$

$$\begin{aligned} S &= -5 \cdot \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} \\ &= -5 \cdot \frac{1 - 59049}{-2} \\ &= -5 \cdot \frac{-59048}{-2} \\ &= -5 \cdot 29524 \\ &= -147620 \end{aligned}$$

Si $q = -3$

$$\begin{aligned} S &= -5 \cdot \frac{1 - (-3)^{10}}{1 - (-3)} \\ &= -5 \cdot \frac{1 - 59049}{1 + 3} \\ &= -5 \cdot \frac{-59048}{4} \\ &= -5 \cdot (-14762) \\ &= 73810 \end{aligned}$$

Conclusion : les deux élèves ont raison.