

Chapitre 4 – 6^e

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes en donnant, si nécessaire, la solution à 0,001 près.

- $4^x = 16$

$$\log 4^x = \log 16$$

$$x \cdot \log 4 = \log 16$$

$$x = \frac{\log 16}{\log 4}$$

$$x = 2$$

- $724,077\,343\,9 = 4 \cdot 32^x$

$$\frac{724,077\,343\,9}{4} = 32^x$$

$$\log 181,019\,335\,975 = x \cdot \log 32$$

$$\frac{\log 181,019\,335\,975}{\log 32} = x$$

$$x = 1,5 = \frac{3}{2}$$

- $2 \cdot 4^x = 256$

$$4^x = \frac{256}{2}$$

$$\log 4^x = \log 128$$

$$x = \frac{\log 128}{\log 4}$$

$$x = 3,5 = \frac{7}{2}$$

Exercice 1 (suite)

- $2\,655,992\,279 = 2,2^x$

$$\log 2\,655,992\,279 = x \cdot \log 2,2$$

$$\frac{\log 2\,655,992\,279}{\log 2,2} = x$$

$$x = 10$$

- $2 \cdot 0,4^x = 12,5$

$$0,4^x = 6,25$$

$$\log 0,4^x = \log 6,25$$

$$x \cdot \log 0,4 = \log 6,25$$

$$x = \frac{\log 6,25}{\log 0,4} = -2$$

- $2,952\,45 = 5 \cdot 0,9^x$

$$\frac{2,952\,45}{5} = 0,9^x$$

$$\log 0,59049 = x \cdot \log 0,9$$

$$\frac{\log 0,59049}{\log 0,9} = x$$

$$x = 5$$

- $48 = 3 \cdot 2^{x-3}$

$$\frac{48}{3} = 2^{x-3}$$

$$\log 16 = (x - 3) \cdot \log 2$$

$$\frac{\log 16}{\log 2} = x - 3$$

$$4 = x - 3$$

$$x = 7$$

Exercice 1 (suite)

- $7 \cdot 3^{5-x} = \frac{7}{9}$

$$3^{5-x} = \frac{1}{9}$$

$$3^{5-x} = \frac{1}{9} = 9^{-1}$$

$$(5-x) \cdot \log 3 = -\log 9$$

$$5-x = \frac{-\log 9}{\log 3}$$

$$5-x = -2$$

$$x = 7$$

- $4\,096 = 2^{3x}$

$$\log 4\,096 = 3x \cdot \log 2$$

$$12 = 3x$$

$$x = 4$$

- $3^{10+x} + 13 = 2\,200$

$$3^{10+x} = 2\,187$$

$$\log 3^{10+x} = \log 2\,187$$

$$(10+x) \cdot \log 3 = \log 2\,187$$

$$(10+x) = \frac{\log 2\,187}{\log 3}$$

$$10+x = 7$$

$$x = -3$$

Exercice 2

Dans une évaluation, se trouve l'énoncé suivant :

« Calculer la somme des dix premiers termes d'une suite géométrique dont $u_0 = -5$ et $u_2 = -45$. »

À la fin de l'évaluation, tu compares ta réponse à celle de ton voisin. Tu as obtenu 73 810 et ton voisin a trouvé -147 620. Qui a raison ? Justifier.

Formule utilisée pour la somme :

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

Ayant besoin de la raison, calculons-la :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 \cdot q^2 \\ -45 &= -5 \cdot q^2 \\ \frac{-45}{-5} &= q^2 \\ q^2 &= 9 \\ q &= \sqrt{9} \end{aligned}$$

$$q = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \text{ATTENTION !}$$

Si $q = 3$

$$\begin{aligned} S &= -5 \cdot \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} \\ &= -5 \cdot \frac{1 - 59049}{-2} \\ &= -5 \cdot \frac{-59048}{-2} \\ &= -5 \cdot 29524 \\ &= -147620 \end{aligned}$$

Si $q = -3$

$$\begin{aligned} S &= -5 \cdot \frac{1 - (-3)^{10}}{1 - (-3)} \\ &= -5 \cdot \frac{1 - 59049}{1 + 3} \\ &= -5 \cdot \frac{-59048}{4} \\ &= -5 \cdot (-14762) \\ &= 73810 \end{aligned}$$

Conclusion : les deux élèves ont raison.

Exercice 3

Les parents de Benoit possèdent une citerne d'eau de pluie. Chaque jour de l'été, $1/16^e$ de l'eau s'évapore. Le premier jour de leur départ en vacances, la hauteur de l'eau contenue dans la citerne était de 1,20 mètre et le jour de leur retour, cette hauteur n'est plus que de 40 cm. Sachant qu'il n'a pas plu depuis leur départ, déterminer la durée de leurs vacances.

$$u_n = u_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)^n$$

$$40 = 120 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)^n$$

$$\frac{40}{120} = \left(\frac{15}{16}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = n \cdot \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{15}{16}\right)} = n$$

$$n = 17,0225\dots$$

$$n \approx 17 \text{ jours.}$$

Exercice 4

Une balle est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. À chaque fois qu'elle touche le sol, elle rebondit jusqu'à 75 % de sa hauteur précédente.

1. Quelle hauteur atteint la balle après le troisième rebond ?
2. Quelle hauteur atteint la balle après le $n^{\text{ième}}$ rebond ?
3. Combien de fois la balle doit-elle rebondir avant que la hauteur soit inférieure à 15 cm ?

1. Quelle hauteur atteint la balle après le troisième rebond ?

$$\begin{aligned}h &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 \\&= 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\&= 2 \cdot \left(\frac{27}{64}\right) \\&= \frac{54}{64} \\&= 0,843... \\h &\approx 84 \text{ cm.}\end{aligned}$$

2. Quelle hauteur atteint la balle après le $n^{\text{ième}}$ rebond ?

$$h = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Exercice 4 (suite)

3. Combien de fois la balle doit-elle rebondir avant que la hauteur soit inférieure à 15 cm ?

$$15 = 200 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{15}{200} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$0,075 = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\log 0,075 = n \cdot \log 0,75$$

$$\frac{\log 0,075}{\log 0,75} = n$$

$$n = 9,003\dots$$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ rebonds.}$$

Exercice 5

Émilie décide de courir chaque jour au cours de ses deux semaines (14 jours) de vacances. Le premier jour elle court 1 km. Chaque jour qui suit, elle court 25 % de plus que la distance courue la veille.

1. Quelle distance totale aura-t-elle parcourue à la fin de ses vacances ?
2. Quel jour parcourra-t-elle plus de 10 km ?

1. Quelle distance **totale** aura-t-elle parcourue à la fin de ses vacances ?

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = 1 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{25}{100}\right)^{(13+1)}}{1 - \left(1 + \frac{25}{100}\right)}$$

$$S = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{14}}{1 - \left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$S = 1 \cdot \frac{1 - \frac{6\,103\,515\,625}{268\,435\,456}}{-\frac{1}{4}}$$

$$S = 1 \cdot \frac{-\frac{5\,835\,080\,169}{268\,435\,456}}{-\frac{1}{4}}$$

$$S = \frac{5\,835\,080\,169}{268\,435\,456} \cdot \frac{4}{1}$$

$$S = \frac{5\,835\,080\,169}{67\,108\,864}$$

$$S \approx 86,949 \text{ km.}$$

Exercice 5 – suite

2. Quel jour parcourra-t-elle plus de 10 km ?

$$10 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^n$$

$$10 = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$\log 10 = n \cdot \log \left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\frac{\log 10}{\log \left(\frac{5}{4}\right)} = n$$

$$\frac{1}{\log \left(\frac{5}{4}\right)} = n$$

$$n = 10,31885\dots$$

$$n = 11 \rightarrow 12^{\text{e}} \text{ jour.}$$

Remarque : Si $n=0$, on est bien le premier jour des vacances.

Exercice 6

Dans le pédiluve de la piscine, on relève toutes les heures la concentration de désinfectant. À 11 heures, il y a 30,706 ppm de produit et à 14 heures, il y en a 18,857 ppm. On suppose que cette déperdition peut être modélisée par une suite géométrique.

1. Quelle est la concentration du produit qui a été mise dans l'eau du pédiluve à l'ouverture de la piscine à 8 heures ?
 - Commençons par calculer la raison :

$$u_n = u_p \cdot (1 + q)^{(n-p)}$$

$$18,857 = 30,706 \cdot (1 + q)^{(14-11)}$$

$$\frac{18,857}{30,706} = (1 + q)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{18,857}{30,706}} = 1 + q$$

$$\sqrt[3]{\frac{18,857}{30,706}} - 1 = q$$

$$q = -0,15903...$$

- Répondons maintenant à la question :

$$u_{11} = u_8 \cdot (1 + q)^{(11-8)}$$

$$30,706 = u_8 \cdot (1 - 0,15903...) ^3$$

$$\frac{30,706}{(1 - 0,15903...) ^3} = u_8$$

$$u_8 = 51,6288...$$

$$u_8 \approx 51,630 \text{ ppm.}$$

Exercice 6 (suite)

2. Si la concentration minimale acceptée est de 13 ppm, à quelle heure (heure entière) doit-on remettre du désinfectant dans le pédiluve ?

$$u_n = u_{14} \cdot (1 + q)^{(n-14)}$$

$$13 = 18,857 \cdot (1 - 0,15903\dots)^{(n-14)}$$

$$\frac{13}{18,857} = (1 - 0,15903\dots)^{(n-14)}$$

$$\log\left(\frac{13}{18,857}\right) = (n - 14) \cdot \log(1 - 0,15903\dots)$$

$$\frac{\log\left(\frac{13}{18,857}\right)}{\log(1 - 0,15903\dots)} = n - 14$$

$$\frac{\log\left(\frac{13}{18,857}\right)}{\log(1 - 0,15903\dots)} + 14 = n$$

$$n = 16,147\dots$$

$$u_8 = 16 \text{ heures.}$$

Exercice 7

Calculer les logarithmes suivants en se basant sur les propriétés vues. Au terme du développement complet, il ne doit plus rester que des logarithmes de nombres premiers (ou éventuellement de 10).

$$\begin{aligned}\bullet \log 14 &= \log(2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 \\ &= 0,30103 + 0,84510 = 1,14613\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 10^{19} &= 19 \cdot \log 10 \\ &= 19 \cdot 1 = 19\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 210 &= \log(3 \cdot 7 \cdot 10) = \log 3 + \log 7 + \log 10 \\ &= 0,47712 + 0,84510 + 1 = 2,32222\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 36 &= \log 6^2 = 2 \cdot \log 6 = 2 \cdot \log(2 \cdot 3) = 2 \cdot (\log 2 + \log 3) \\ &= 2 \cdot (0,30103 + 0,47712) = 1,55630\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 512 &= \log 2^9 = 9 \cdot \log 2 \\ &= 9 \cdot 0,30103 = 2,70927\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 27^2 &= 2 \cdot \log 27 = 2 \cdot \log 3^3 = 2 \cdot 3 \cdot \log 3 \\ &= 6 \cdot 0,47712 = 2,86273\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 60 &= \log(6 \cdot 10) = \log 6 + \log 10 = \log(2 \cdot 3) + \log 10 \\ &= \log 2 + \log 3 + \log 10 \\ &= 0,30103 + 0,47712 + 1 = 1,77815\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 121 &= \log 11^2 = 2 \cdot \log 11 \\ &= 2 \cdot 1,04139 = 2,08278\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \log 245 &= \log(5 \cdot 7^2) = \log 5 + 2 \cdot \log 7 \\ &= 0,69897 + 2 \cdot 0,84510 = 2,38917\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet 4 \cdot \log 100^3 &= 4 \cdot 3 \cdot \log 10^2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \log 10 \\ &= 24 \cdot 1 = 24\end{aligned}$$

Exercice de renforcement ** – NON CORRIGÉ –

Calculer les logarithmes suivants en se basant sur les propriétés vues. Au terme du développement complet, il ne doit plus rester que des logarithmes de nombres premiers (ou éventuellement de 10).

1) $\log 10^{239} =$

12) $17 \cdot \log 900^4 =$

2) $\log 300 =$

13) $\log \sqrt[6]{64^4} =$

3) $\log 2700 =$

14) $\log \left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{128^{\frac{2}{5}}} \right) =$

4) $\log 32 =$

15) $\log \left(\frac{\sqrt[8]{49^4}}{10} \right)^{\frac{4}{3}} =$

5) $\log 33 =$

6) $\log 81 =$

16) $\log \frac{\sqrt[3]{125^2}}{\sqrt[4]{625^2}} =$

7) $\log 30^2 =$

8) $\log 10^{\frac{5}{3}} =$

17) $\log \frac{121}{12} =$

9) $\log 144 =$

18) $3 \cdot \log \frac{25^2}{25^3} =$

10) $\log 1024 =$

11) $\log 2500^9 =$

19) $\log \sqrt[6]{\frac{3^9}{4^9}} =$