

Chapitre 5 – 6^e – Intérêts composés

Exercice 1

Un capital de 5 000,00 € est placé, à intérêts composés, pendant 10 ans, au taux annuel de 4,5 %. Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts.

Données :

* $C = 5\,000,00 \text{ €}$

* $t = 4,5\%$

* $n = 10 \text{ ans}$

Résolution :

et

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$\begin{aligned} A &= 5\,000,00 \cdot \left(1 + \frac{4,5}{100}\right)^{10} \\ &= 7\,764,85 \text{ €} \end{aligned}$$

$$I = A - C$$

$$\begin{aligned} I &= 7\,764,85 - 5\,000,00 \\ &= 2\,764,85 \text{ €} \end{aligned}$$

Exercice 2

Un capital de 7 200,00 € est placé, à intérêts composés, pendant 8 ans, au taux annuel de 6 %. Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts.

Données :

* $C = 7\,200,00 \text{ €}$

* $t = 6\%$

* $n = 8 \text{ ans}$

Résolution :

et

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$\begin{aligned} A &= 7\,200,00 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^8 \\ &= 11\,475,71 \text{ €} \end{aligned}$$

$$I = A - C$$

$$\begin{aligned} I &= 11\,475,71 - 7\,200,00 \\ &= 4\,275,71 \text{ €} \end{aligned}$$

Exercice 3

J'ai emprunté 325 000,00 € à ma banque pour construire une maison. La durée de mon emprunt est de 20 ans. Combien devrais-je rembourser si je bénéficie d'un taux annuel de 4,3 % ?

Données :

* $C = 325\,000,00 \text{ €}$

* $t = 4,3 \%$

* $n = 20 \text{ ans}$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$\begin{aligned} A &= 325\,000,00 \cdot \left(1 + \frac{4,3}{100}\right)^{20} \\ &= 754\,344,15 \text{ €} \end{aligned}$$

Exercice 4

Un capital est placé, à intérêts composés, pendant 5 ans, au taux annuel de 5 %. La valeur acquise est de 8 933,97 €. Calcule le capital placé et le montant des intérêts perçus.

Données :

* $A = 8\,933,97 \text{ €}$

* $t = 5 \%$

* $n = 5 \text{ ans}$

Résolution :

et

$$A = C \cdot \left(1 + t\right)^n$$

$$8\,933,97 = C \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{8\,933,97}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^5} \\ &= 6\,999,9992... \\ &= 7\,000,00 \text{ €} \end{aligned}$$

$$I = A - C$$

$$\begin{aligned} I &= 8\,933,97 - 7\,000,00 \\ &= 1\,933,97 \text{ €} \end{aligned}$$

Exercice 5

Un capital est placé, à intérêts composés, pendant 7 ans, au taux annuel de 6 %. La valeur acquise est de 19 126,18 €. Calcule le capital placé et le montant des intérêts perçus.

Données :

$$* A = 19\,126,18 \text{ €}$$

$$* t = 6 \%$$

$$* n = 7 \text{ ans}$$

Résolution :

et

$$A = C \cdot \left(1 + t\right)^n$$

$$19\,126,18 = C \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^7$$

$$C = \frac{19\,126,18}{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^7}$$

$$= 12\,720,00 \text{ €}$$

$$I = A - C$$

$$\begin{aligned} I &= 19\,126,18 - 12\,720,00 \\ &= 6\,406,18 \text{ €} \end{aligned}$$

Exercice 6

À quel taux faut-il placer par capitalisation 3 000,00 € pour obtenir 3 121,20 € après 2 ans ?

Données :

$$* C = 3\,000,00 \text{ €}$$

$$* A = 3\,121,20 \text{ €}$$

$$* n = 2 \text{ ans}$$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$3\,121,20 = 3\,000,00 \cdot (1 + t)^2$$

$$\frac{3\,121,20}{3\,000,00} = (1 + t)^2$$

$$\sqrt{\frac{3\,121,20}{3\,000,00}} = \sqrt{(1 + t)^2}$$

$$\sqrt{1,0404} = (1 + t)$$

$$1,02 = (1 + t)$$

$$1,02 - 1 = t$$

$$t = 0,02 = 2\%$$

Exercice 7

À quel taux faut-il placer par capitalisation 10 000,00 € pour obtenir 13 022,60 € après 6 ans ?

Données :

* $C = 10\,000,00 \text{ €}$

* $A = 13\,022,60 \text{ €}$

* $n = 6 \text{ ans}$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$13\,022,60 = 10\,000,00 \cdot (1 + t)^6$$

$$\frac{13\,022,60}{10\,000,00} = (1 + t)^6$$

$$\sqrt[6]{\frac{13\,022,60}{10\,000,00}} = \sqrt[6]{(1 + t)^6}$$

$$\sqrt[6]{1,30226} = (1 + t)$$

$$\sqrt[6]{1,30226} - 1 = t$$

$$t = 0,044999... = 4,50\%$$

Exercice 8

J'ai prêté 2 000,00 € à un taux annuel de 3 %. La personne m'a remboursé 2 459,75 € au total. Pendant combien de temps m'a-t-il emprunté les 2 000,00 € ?

Données :

$$* C = 2\,000,00 \text{ €}$$

$$* A = 2\,459,75 \text{ €}$$

$$* t = 3 \%$$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$2\,459,75 = 2\,000,00 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$$

$$\frac{2\,459,75}{2\,000,00} = (1,03)^n$$

$$\log 1,229875 = n \cdot \log 1,03$$

$$\frac{\log 1,229875}{\log 1,03} = n$$

$$n = 7 \text{ ans}$$

Exercice 9

Je viens de rembourser la somme de 689 626,29 € suite à un emprunt de 350 000,00 € à un taux de 2,75 % l'an. Quel fut la durée de mon emprunt ?

Données :

* $C = 350\,000,00 \text{ €}$

* $A = 689\,626,29 \text{ €}$

* $t = 2,75 \%$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$689\,626,29 = 350\,000,00 \cdot \left(1 + \frac{2,75}{100}\right)^n$$

$$\frac{689\,626,29}{350\,000,00} = (1,0275)^n$$

$$\log 1,970360 = n \cdot \log 1,0275$$

$$\frac{\log 1,970360}{\log 1,0275} = n$$

$$n = 25 \text{ ans}$$

Exercice 10

Pendant combien de temps ai-je emprunté la somme de 12 000,00 € au taux annuel de 1,21 % si je dois rembourser aujourd'hui la somme de 13 863,16 € ?

Données :

* $C = 12\,000,00 \text{ €}$

* $A = 13\,863,16 \text{ €}$

* $t = 1,21 \%$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$13\,863,16 = 12\,000,00 \cdot \left(1 + \frac{1,21}{100}\right)^n$$

$$\frac{13\,863,16}{12\,000,00} = (1,0121)^n$$

$$\log 1,155263 = n \cdot \log 1,0121$$

$$\frac{\log 1,155263}{\log 1,0121} = n$$

$$n = 12 \text{ ans}$$

Exercice 11

J'ai placé, il y a quelques années déjà, la somme de 25 000,00 € sur un compte au nom de mon fils, le jour de son anniversaire. Aujourd'hui, il a 25 ans et décide de vider son compte. La banque lui donne la somme de 39 335,26 €. Sachant que le taux d'intérêt annuel a été de 2,55 % tout au long de la période, quel âge avait mon fils quand j'ai placé l'argent sur son compte ?

Données :

$$* C = 25\,000,00 \text{ €}$$

$$* A = 39\,335,26 \text{ €}$$

$$* t = 2,55 \%$$

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$39\,335,26 = 25\,000,00 \cdot \left(1 + \frac{2,55}{100}\right)^n$$

$$\frac{39\,335,26}{25\,000,00} = (1,0255)^n$$

$$\log 1,573410 = n \cdot \log 1,0255$$

$$\frac{\log 1,573410}{\log 1,0255} = n$$

$$n = 18 \text{ ans}$$

Durée de l'emprunt : 18 ans

Le fils a maintenant : 25 ans

Au placement de l'argent, il avait donc : $25 - 18 = 7$ ans

Exercice 12

À quel taux dois-je placer un certain capital C pour qu'il double de valeur au bout de 13 ans ?

Données :

* $A = 2C$

* $n = 13$ ans

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$2C = C \cdot (1 + t)^{13}$$

$$2 = (1 + t)^{13}$$

$$\sqrt[13]{2} = (1 + t)$$

$$\sqrt[13]{2} - 1 = t$$

$$t = 0,054766... = 5,48\%$$

Exercice 13

À quel taux dois-je placer un certain capital C pour qu'il triple de valeur au bout de 20 ans ?

Données :

* $A = 3C$

* $n = 20$ ans

Résolution :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$3C = C \cdot (1 + t)^{20}$$

$$3 = (1 + t)^{20}$$

$$\sqrt[20]{3} = (1 + t)$$

$$\sqrt[20]{3} - 1 = t$$

$$t = 0,056467... = 5,65\%$$

Exercice 14

Est-il possible qu'une somme d'argent, placée sur un compte d'épargne, puisse fructifier de telle manière que sa valeur triple en seulement 5 ans ? Justifier.

Données :

* $A = 3C$

* $n = 5$ ans

Résolution :

Il n'existe aucun compte bancaire qui permet de réaliser cela.

Le taux d'intérêt serait beaucoup trop élevé. En voici la justification :

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

$$3C = C \cdot (1 + t)^5$$

$$3 = (1 + t)^5$$

$$\sqrt[5]{3} = (1 + t)$$

$$\sqrt[5]{3} - 1 = t$$

$$t = 0,245730... = 24,57\%$$

Exercice 15

Lorsque je prendrai ma pension dans 40 ans, je souhaiterais avoir à ma disposition une somme de 50 000,00 €, après prélèvement par l'État d'un précompte mobilier de 20 %. Quelle somme dois-je placer sur mon compte, aujourd'hui, à intérêts composés et au taux annuel de 2 %, pour obtenir ce montant ?

Données :

- * $A_{nette} = 50\,000,00 \text{ €}$
- * $n = 40 \text{ ans}$
- * précompte mobilier = 20 %

Résolution :

$$\begin{aligned} A_{nette} &= A_{brute} - 20 \% \text{ de } A_{brute} \\ &= 80 \% \text{ de } A_{brute} \\ &= \frac{80}{100} \cdot A_{brute} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{brute} &= \frac{A_{nette}}{\frac{80}{100}} \\ &= \frac{50\,000,00}{0,80} \\ &= 62\,500,00 \text{ €} \end{aligned}$$

$$A_{brute} = C \cdot \left(1 + t\right)^n$$

$$\begin{aligned} 62\,500,00 &= C \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{40} \\ C &= \frac{62\,500,00}{\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{40}} \\ &= 28\,305,65 \text{ €} \end{aligned}$$