

Chapitre 5

Exercice 1

Lors d'une étude de la qualité des eaux destinées à la consommation, on analyse le contenu de soixante flacons dont on détermine la concentration en nitrates en mg/l.

Résultats de l'analyse :

Concentration (mg/l)	45,8	46,6	47,0	47,5	48,2	49,2	49,5	50,0	50,1	50,2
Nb. flacons	1	9	2	10	9	10	7	7	3	2

1. Déterminer le mode, la moyenne et l'écart-type.

Il s'agit d'une série bimodale : $Mo_1 = 47,5$ et $Mo_2 = 49,2$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 45,8 + 9 \cdot 46,6 + \dots + 2 \cdot 50,2}{60} = \frac{2907,2}{60} = 48,45\bar{3} \text{ mg/l}$$

Pour l'écart-type (σ) : voir pages suivantes

2. Calculer la médiane.

x_i	n_i	N_i
45,8	1	1
46,6	9	10
47	2	12
47,5	10	22
48,2	9	31
49,2	10	41
49,5	7	48
50	7	55
50,1	3	58
50,2	2	60

$$Me = 48,2 \text{ mg/l}$$

3. Pour que l'eau soit propre à la consommation, sa concentration en nitrates doit être inférieure ou égale à 50 mg/l. Quel est le pourcentage de flacons contenant de l'eau impropre à la consommation ?

$$f_{\text{flacons d'eau impropre}} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8,33\%$$

Exercice 1 - Suite

Pour montrer de manière chiffrée l'équivalence des deux formules, il sera fait (à titre de simple comparaison) deux fois le calcul de l'écart-type.

Premier calcul de l'écart-type

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

* La moyenne est de : 48,453

* Tableau :

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
45,8	1	-2,66	7,0756	7,0756
46,6	9	-1,86	3,4596	31,1364
47	2	-1,46	2,1316	4,2632
47,5	10	-0,96	0,9216	9,216
48,2	9	-0,26	0,0676	0,6084
49,2	10	0,74	0,5476	5,476
49,5	7	1,04	1,0816	7,5712
50	7	1,54	2,3716	16,6012
50,1	3	1,64	2,6896	8,0688
50,2	2	1,74	3,0276	6,0552

* Somme des $n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$: 96,072

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{60} \cdot 96,072 = 1,6012$

* Écart-type : $\sigma = 1,265...$

Exercice 1 - Suite

Second calcul de l'écart-type

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

* La moyenne est de : 48,453

* Tableau :

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
45,8	1	2097,64	2097,64
46,6	9	2171,56	19544,04
47	2	2209	4418
47,5	10	2256,25	22562,5
48,2	9	2323,24	20909,16
49,2	10	2420,64	24206,4
49,5	7	2450,25	17151,75
50	7	2500	17500
50,1	3	2510,01	7530,03
50,2	2	2520,04	5040,08

* Somme des $n_i x_i^2$: 140 959,6

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{60} \cdot 140\,959,6 - 48,453^2 = 1,60115$

* Écart-type : $\sigma = 1,265...$

Exercice 2.

Une auberge de jeunesse a effectué une étude sur sa fréquentation au mois d'août sur deux-cents personnes.

Le relevé des durées de séjour a donné les résultats suivants :

Nb jours	1	2	3	4	5
Fréquence (%)	28,0	31,5	29,0	7,5	4,0

Déterminer le mode, la moyenne, la médiane et l'écart-type.

$$Mo = 2$$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 28 + 2 \cdot 31,5 + \dots + 5 \cdot 4}{100} = \frac{228}{100} = 2,28 \text{ jours}$$

Médiane :

x_i	f_i	F_i
1	28	28
2	31,5	59,5
3	29	88,5
4	7,5	96
5	4	100

$$Me = 2 \text{ jours}$$

Pour l'écart-type (σ) : voir page suivante

Exercice 2 - Suite**Calcul de l'écart-type**

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

* La moyenne est de : 2,28

* Tableau :

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
1	56	1	56
2	63	4	252
3	58	9	522
4	15	16	240
5	8	25	200

* Somme des $n_i x_i^2$: 1 270

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{200} \cdot 1\,270 - 2,28^2 = 1,151\,6$

* Calcul de σ : $\sigma = 1,073\,126\dots$

Exercice 3

Le tableau suivant donne la répartition des voyagistes français (en 1990) selon leur taille en flux de vacanciers dans le marché métropolitain français. Cette étude ne concerne que les voyagistes ayant transporté plus de 15 000 personnes dans l'année.

Nb vacanciers (milliers)	$[15;25[$	$[25;50[$	$[50;75[$	$[75;100[$	$[100;150[$	$[150;200[$	$[200;500[$
Nb voyagistes	26	44	7	9	5	0	9

Avant de répondre aux questions : faire un tableau.

Nb vacanciers (milliers)	Nb voyagistes	N_i	$f_i(\%)$	$F_i(\%)$
$[15;25[$	26	26	26	26
$[25;50[$	44	70	44	70
$[50;75[$	7	77	7	77
$[75;100[$	9	86	9	86
$[100;150[$	5	91	5	91
$[150;200[$	0	91	0	91
$[200;500[$	9	100	9	100

1. Déterminer : population et caractère.

Population : voyagistes français en 1990

Caractère : nombre de vacanciers

2. Déterminer le pourcentage de voyagistes dont le flux de vacanciers fut :

* inférieur à 50 000 (70 %)

* compris entre 20 000 et 50 000 (57 %)

Exercice 3 - suite

3. Calculer $\bar{x}$ et σ

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 26 + 37,5 \cdot 44 + \dots + 350 \cdot 9}{100} = \frac{7170}{100} \rightarrow 71,700 \text{ vacanciers}$$

Calcul de l'écart-type

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

* La moyenne est de : 71,70

* Tableau :

Classes	x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
[15 ; 25[	20	26	400	10 400
[25 ; 50[	37,5	44	1 406,25	61 875
[50 ; 75[	62,5	7	3 906,25	27 343,75
[75 ; 100[	87,5	9	7 656,25	68 906,25
[100 ; 150[	125	5	15 625	78 125
[150 ; 200[	175	0	30 625	0
[200 ; 500[	350	9	122 500	1 102 500

* Somme des $n_i x_i^2$: 1 349 150

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{100} \cdot 1\,349\,150 - 71,70^2 = 8\,350,61$

* Calcul de σ : $\sigma = \sqrt{8\,350,61} = 91,381\,672\dots$

$\rightarrow \sigma \approx 91\,382 \text{ vacanciers}$

4. Déterminer le mode.

Classe modale : [25 ; 50[

$Mo = 37,5 \rightarrow 37\,500 \text{ vacanciers}$

Exercice 3 - suite

5. Calculer la médiane.

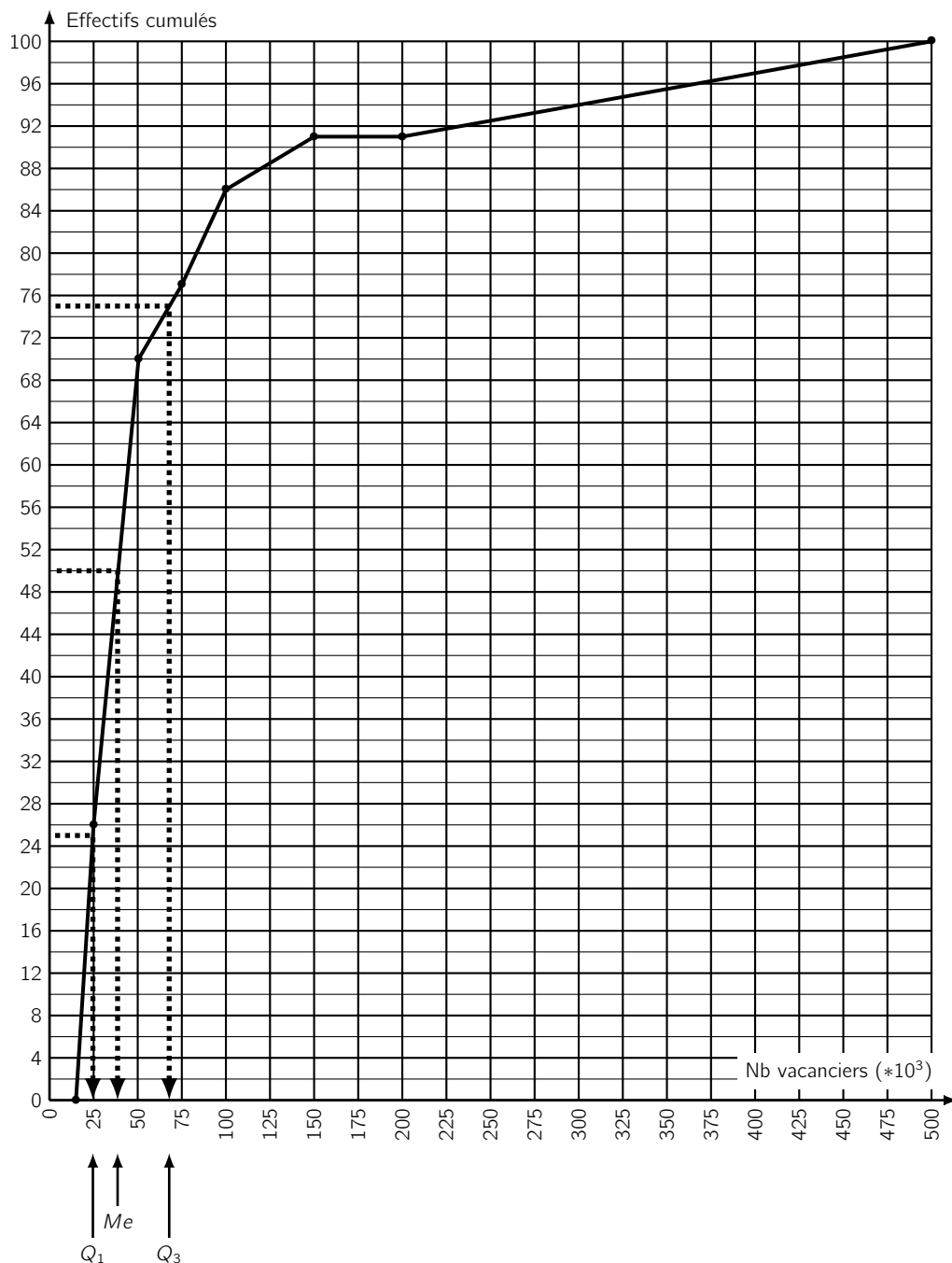
Classe médiane : $[25; 50[$

$$Me = 25 + \frac{25}{44} \cdot \left(\frac{100}{2} - 26 \right) = 38,6363... \rightarrow Me \approx 38\,636 \text{ vacanciers}$$

6. Calculer les premier et troisième quartiles ; ensuite vérifier les valeurs obtenues pour Me , Q_1 et Q_3 sur un graphique.

$$Q_1 = 15 + \frac{10}{26} \cdot \left(\frac{100}{4} - 0 \right) = 24,6153... \rightarrow Q_1 \approx 24\,615 \text{ vacanciers}$$

$$Q_3 = 50 + \frac{25}{7} \cdot \left(\frac{3 \cdot 100}{4} - 70 \right) = 67,8571... \rightarrow Q_3 \approx 67\,857 \text{ vacanciers}$$



Exercice 3 - suite

7. Calculer l'intervalle interquartile.

L'intervalle interquartile : $[24,6...; 67,8...]$

→ longueur $\approx 43\,241$ personnes

8. Déterminer l'étendue de la série.

L'étendue de la série : $[15; 500[$

→ longueur = $485\,000$ personnes

9. Déterminer le pourcentage de voyageurs dont le flux de vacanciers fut supérieur à la moyenne.

Rappel : $\bar{x} = 71,7$
 $\quad \quad \quad 0,924$

$$(P = \underbrace{(7/25)}_{0,924} \cdot 3,3 + 9 + 5 + 0 + 9 = 23,924 \%)$$

Exercice complémentaire 1

L'âge au 1^{er} janvier 1991 du personnel d'une entreprise liégeoise est repris dans le tableau suivant :

Âge des salariés	$[20;25[$	$[25;30[$	$[30;35[$	$[35;40[$	$[40;45[$	$[45;50[$	$[50;55[$	$[55;60[$	$[60;65[$
Hommes	10	26	44	52	38	20	17	7	0
Femmes	0	0	3	14	14	6	11	2	0

1. Déterminer Mo_H , Mo_F et Mo_{H+F} .
2. Calculer $\bar{x}_H$, $\bar{x}_F$ et $\bar{x}_{H+F}$.
3. Déterminer Me_H , Me_F et Me_{H+F} .
4. Calculer σ_H , σ_F et σ_{H+F} .
5. Calculer les intervalles interquartiles pour les H, les F et les H+F.

Premièrement : faire le tableau :

Âge des salariés	$[20;25[$	$[25;30[$	$[30;35[$	$[35;40[$	$[40;45[$	$[45;50[$	$[50;55[$	$[55;60[$	$[60;65[$
Centres	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5
Hommes	10	26	44	52	38	20	17	7	0
H cumul.	10	36	80	132	170	190	207	214	214
Femmes	0	0	3	14	14	6	11	2	0
F cumul.	0	0	3	17	31	37	48	50	50
H + F	10	26	47	66	104	124	145	157	157
H + F cumul.	10	36	83	149	201	227	255	264	264

Exercice complémentaire 1 - suite

1. Déterminer Mo_H , Mo_F et Mo_{H+F} .

$$Mo_H = 37,5$$

$$Mo_{F-1} = 37,5 \text{ et } Mo_{F-2} = 42,5$$

$$Mo_{H+F} = 37,5.$$

2. Calculer $\bar{x}_H$, $\bar{x}_F$ et $\bar{x}_{H+F}$.

$$\bar{x}_H = \frac{22,5 \cdot 10 + 27,5 \cdot 26 + \dots + 62,5 \cdot 0}{214} = \frac{8180}{214} = 38,2 \text{ ans}$$

$$\bar{x}_F = \frac{22,5 \cdot 0 + 27,5 \cdot 0 + 32,5 \cdot 3 + \dots + 62,5 \cdot 0}{50} = \frac{2195}{50} = 43,9 \text{ ans}$$

$$\bar{x}_{H+F} = \frac{22,5 \cdot 10 + 27,5 \cdot 36 + \dots + 62,5 \cdot 0}{264} = \frac{10375}{264} = 39,3 \text{ ans}$$

3. Déterminer Me_H , Me_F et Me_{H+F} .

$$Me_H = 35 + \frac{5}{52} \cdot \left(\frac{214}{2} - 80 \right) = 37,596\dots$$

$$Me_F = 35 + \frac{5}{14} \cdot \left(\frac{50}{2} - 3 \right) = 42,857\dots$$

$$Me_{H+F} = 35 + \frac{5}{66} \cdot \left(\frac{264}{2} - 83 \right) = 38,712\dots$$

4. Calculer σ_H , σ_F et σ_{H+F} .

Voir pages suivantes.

5. Calculer les intervalles interquartiles pour les H, les F et les H+F.

$$[Q_1; Q_3]_H = [31,988\dots; 43,75]_H (\approx 11,76) \text{ avec :}$$

$$Q_1 = 30 + \frac{5}{44} \cdot \left(\frac{214}{4} - 36 \right) = 31,988\dots$$

$$Q_3 = 40 + \frac{5}{38} \cdot \left(\frac{3 \cdot 214}{4} - 132 \right) = 43,75$$

$$[Q_1; Q_3]_F = [38,392\dots; 50,227\dots]_F (\approx 11,83) \text{ avec :}$$

$$Q_1 = 35 + \frac{5}{14} \cdot \left(\frac{50}{4} - 3 \right) = 38,392\dots$$

$$Q_3 = 50 + \frac{5}{11} \cdot \left(\frac{3 \cdot 50}{4} - 37 \right) = 50,227\dots$$

$$[Q_1; Q_3]_{H+F} = [33,191\dots; 44,711\dots]_{H+F} (\approx 11,52) \text{ avec :}$$

$$Q_1 = 30 + \frac{5}{47} \cdot \left(\frac{264}{4} - 36 \right) = 33,191\dots$$

$$Q_3 = 40 + \frac{5}{52} \cdot \left(\frac{3 \cdot 264}{4} - 149 \right) = 44,711\dots$$

Exercice complémentaire 1 - Suite**Calcul de l'écart-type (H)**

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

* La moyenne est de : $\frac{8180}{214} = 38,2...$

* Tableau :

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
22,5	10	506,25	5 062,5
27,5	26	756,25	19 662,5
32,5	44	1 056,25	46 475
37,5	52	1 406,25	73 125
42,5	38	1 806,25	68 637,5
47,5	20	2 256,25	45 125
52,5	17	2 756,25	46 856,25
57,5	7	3 306,25	23 143,75
62,5	0	3 906,25	0

* Somme des $n_i x_i^2$: 328 087,5

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{214} \cdot 328\,087,5 - \left(\frac{8180}{214} \right)^2 = 73,879...$

* Calcul de σ : $\sigma_H = 8,595\,298...$

Exercice complémentaire 1 - Suite**Calcul de l'écart-type (F)**

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

* La moyenne est de : $\frac{2195}{50} = 43,9$

* Tableau :

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
22,5	0	506,25	0
27,5	0	756,25	0
32,5	3	1 056,25	3 168,75
37,5	14	1 406,25	19 687,5
42,5	14	1 806,25	25 287,5
47,5	6	2 256,25	13 537,5
52,5	11	2 756,25	30 318,75
57,5	2	3 306,25	6 612,5
62,5	0	3 906,25	0

* Somme des $n_i x_i^2$: 98 612,5

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{50} \cdot 98\,612,5 - \left(\frac{2195}{50} \right)^2 = 45,04$

* Calcul de σ : $\sigma_F = 6,711\,184...$

Exercice complémentaire 1 - Suite**Calcul de l'écart-type (H+F)**

Formule utilisée :
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

* La moyenne est de : $\frac{10375}{264} = 39,2...$

* Tableau :

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
22,5	10	506,25	5 062,5
27,5	26	756,25	19 662,5
32,5	47	1 056,25	49 643,75
37,5	66	1 406,25	92 812,5
42,5	52	1 806,25	93 925
47,5	26	2 256,25	58 662,5
52,5	28	2 756,25	77 175
57,5	9	3 306,25	29 756,25
62,5	0	3 906,25	0

* Somme des $n_i x_i^2$: 426 700

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{264} \cdot 426\,700 - \left(\frac{10375}{264} \right)^2 = 71,857...$

* Calcul de σ : $\sigma_{H+F} = 8,476...$