

Guy DOTREMONT

Cours de mathématique

5^e TQ

2 périodes par semaine

2024 – 2025

Le syllabus que vous tenez entre les mains est destiné aux élèves du troisième degré de l'enseignement secondaire technique de qualification de l'Institut Émile Gryzon à Anderlecht et est basé sur le programme du CPEONS qui prévoit l'enseignement de quatre UAA (Unités d'Acquis d'Apprentissage) sur deux années, réparties comme suit :

	5 ^e	6 ^e
UAA 1 : Approche graphique d'une fonction	•	-
UAA 2 : Modèles de croissance (2 parties)	•	•
UAA 3 : Statistique	•	-
UAA 4 : Probabilité	-	•

Ce cours n'est qu'une base de travail et ne se substitue en aucun cas au cours donné en classe.

En cas de difficultés, je suis là pour vous aider. Mais ce ne sera possible que si, de votre côté, vous avez déjà fait des efforts personnels. Dans le cas contraire, toute tentative de ma part serait vouée à l'échec.

N'oubliez pas une chose importante : vous êtes arrivé au troisième degré et la matière est toujours plus conséquente. Un travail régulier est important et est gage d'une probabilité de réussite supérieure, les statistiques sont là pour le (dé)montrer...

Je vous invite à visiter régulièrement mon site, créé pour vous :

[https ://ieg.gdotremont.be](https://ieg.gdotremont.be)



Pour me joindre : **gdotremont@spfb.edu.brussels**

J'espère que ces deux années se passeront le mieux possible. Bon travail !

Table des matières

UAA 3 : Statistique	8
1 Introduction	8
1.1 Qu'est-ce que la statistique?	8
1.2 Bref historique	8
2 Terminologie	10
2.1 Exemple – Auberge de jeunesse	10
2.1.1 Nationalité des résidents	10
2.1.2 Durée du séjour	10
2.1.3 Âge des résidents	11
3 Statistiques à une variable : tableaux et graphiques	12
3.1 Série statistique	12
3.2 Tableau brut	12
3.2.1 Activité – Loisirs	12
3.3 Tableau recensé	13
3.3.1 Série discrète à caractère qualitatif	13
3.3.2 Série discrète à caractère quantitatif	14
3.3.3 Série classée	15
3.4 Graphiques	18
3.4.1 Histogramme	18
3.4.2 Polygone	19
3.4.3 Attention aux échelles!	20
3.5 Exercices	23
4 Statistiques à une variable : paramètres de position	30
4.1 Mode	30
4.2 Moyenne	32

4.3	Médiane	34
4.4	Exercices	36
5	Statistiques à une variable : paramètres de dispersion	39
5.1	Activité – Résultats scolaires	39
5.2	Variance et écart-type	40
5.2.1	La variance	40
5.2.2	L'écart-type	40
5.3	Quartiles, déciles et centiles	43
5.4	Étendue	43
5.5	Boîte à moustaches	44
5.6	Exercices	45
6	Statistiques à deux variables	50
6.1	Définition	50
6.2	Nuage de points	50
6.2.1	Exemple – Dépenses publicitaires	51
6.3	Corrélation ou causalité ?	52
6.4	Ajustement affine graphique	53
6.5	Droite de Mayer	54
6.6	Exercices	55
UAA 1	Approche graphique d'une fonction	60
1	Notion de graphe	60
1.1	Qu'est-ce qu'un graphe ?	60
1.2	Que doit contenir un graphe ?	61
1.3	Prenons un exemple	62
2	Notion de fonction	63
2.1	Activité – Panneau publicitaire	63
2.2	Activité – Portail électronique	65
2.3	Activité – Aller-retour	66
2.4	Exercices	68
3	Domaine et ensemble image d'une fonction	71
3.1	Activité – Logo	71
3.1.1	Les parties de $\mathbb{R}$	75
3.1.2	Domaine d'une fonction	76
3.1.3	Ensemble image d'une fonction	76

3.2	Activité – Grue de chantier	77
3.3	Activité – Éolienne	78
4	Intersections de la fonction avec les axes	79
4.1	Activité – Fonction & intersections	79
4.2	Exercices	81
5	Image et antécédents	84
5.1	Activité – Évolution de températures (1)	84
5.2	Exercices	86
6	Signe d'une fonction	88
6.1	Activité – Évolution de températures (2)	88
6.1.1	Le signe d'une fonction, en résumé	89
6.2	Exercices	90
7	Variation d'une fonction	92
7.1	Activité – Taux d'alcoolémie	92
7.2	Exercices	94
8	Résolution graphique d'équations et d'inéquations	99
8.1	Activité – Bénéfices	99
8.2	Activité – Scooters	100
8.3	En règle générale	102
8.3.1	Droite parallèle à l'axe des abscisses	102
8.3.2	Fonction affine	104
8.3.3	Fonction quelconque	106
8.3.4	Et en cas d'inéquation ?	108
8.4	Exercices	110
UAA 2	: Modèles de croissance, partie 5 TQ	115
1	Rappels	115
2	Constructions...	116
2.1	Construction d'un tableau de nombres à partir d'une formule	116
2.1.1	Activité – Distance de freinage (1)	116
2.2	Construction d'un graphe à partir d'un tableau de nombres	117
2.2.1	Activité – Distance de freinage (2)	117
2.3	Exercices	118

3	Les fonctions de référence	119
3.1	Fonction constante	119
3.1.1	Définition	119
3.1.2	Représentation graphique	119
3.2	Fonction linéaire	120
3.2.1	Définition	120
3.2.2	Représentation graphique	120
3.3	Fonction affine	121
3.3.1	Définition	121
3.3.2	Représentation graphique	121
3.4	La fonction de degré 2 : la parabole	123
3.4.1	Définition	123
3.4.2	Représentation graphique	123
3.4.3	Résolution	125
3.4.4	Applications	126
3.5	La fonction de degré 3	127
3.5.1	Définition	127
3.5.2	Représentation graphique	127
3.6	La fonction inverse	128
3.6.1	Définition	128
3.6.2	Représentation graphique	128
3.7	La fonction racine carrée	129
3.7.1	Définition	129
3.7.2	Représentation graphique	129
3.8	La fonction puissance	129
3.8.1	Définition	129
3.8.2	Représentation graphique	129
3.9	Exercices	130

UAA 3

Statistique

Chapitre 1

Introduction

1.1 Qu'est-ce que la statistique ?

La statistique, au sens général du terme, s'est invitée progressivement dans notre vie quotidienne. Elle est partout ! Et pourtant, bien souvent, on entend des commentaires du genre *La stat, c'est trop compliqué*, ou encore *La stat, ça sert à rien ; ça nous servira jamais*. Détrompez-vous, cher lecteur. Elle est vraiment partout et indispensable ; on la retrouve aussi bien dans les quotidiens que dans les revues spécialisées en économie sous la forme de tableaux, de graphes,... issus de sondages ou autres analyses de valeurs.

On utilise la statistique dans des domaines aussi divers que la démographie, la météorologie, la sociologie, la physique, la médecine, ou encore les assurances,...

Il faut savoir que la statistique est un outil mathématique. Il ne s'agit, en effet, que d'un outil, un langage qui va permettre de faire passer un message. Et ce message, c'est vous qui allez d'abord le créer et le faire passer ensuite en transformant les résultats recueillis en explications claires.

Vous allez donc recueillir des données (les statistiques), les organiser et les présenter de façon à pouvoir les analyser (avec les outils adéquats) et en tirer des informations permettant de gérer, de prévoir,...

La statistique permet donc de décrire simplement la complexité de la réalité en la synthétisant et en la résumant.

Nous pouvons donc définir la **statistique** comme étant *l'ensemble des outils et procédures qui permettent de réorganiser un ensemble de données, de les décrire et de les résumer*.

1.2 Bref historique

Je dis plus haut dans cette introduction que la statistique a envahi progressivement notre quotidien. Mais de quand date l'apparition de la statistique ? Il est difficile de le

dire de manière précise mais, selon le dictionnaire Le Robert, cela viendrait de l'italien « *statista* » (homme d'État), famille du latin « *status* » qui signifie « État ».

Ce que l'on sait c'est que la statistique existe dès la naissance des premières structures sociales. Et Wikipedia d'ajouter : « [...] Les premiers textes écrits retrouvés sont des recensements de bétail, des informations sur son cours et des contrats divers. On a ainsi tracé des recensements en Chine ou en Égypte au XVIII^e siècle Av. J.C. [...] Ce n'est qu'au XVIII^e siècle Apr. J.C. ⁽¹⁾ que l'on voit apparaître le rôle prévisionnel des statistiques avec la construction des premières tables de mortalité [...] » ⁽²⁾.

Au début du XIX^e siècle, il y a eu le développement des probabilités et des statistiques comme on les connaît encore aujourd'hui, développement favorisé par l'essor des (super) calculateurs et autres ordinateurs.

Qui sont ces gens à l'origine de la statistique ?

Dans beaucoup de disciplines, et la mathématique en fait partie, il est difficile de nommer des personnes qui en sont précisément à l'origine. Cependant, des noms reviennent souvent tels que Blaise Pascal ⁽³⁾ ou encore Adolphe Quetelet ⁽⁴⁾. D'autres sont moins connus, voire totalement inconnus du grand public tels que Ronald Aylmer Fisher ⁽⁵⁾ ou John Tukey ⁽⁶⁾ dont nous reparlerons plus loin dans le cours.

Depuis, bien des personnes ont contribué au développement de cette discipline. Une simple recherche sur Internet vous fournira des dizaines de noms.

(1). Soit environ 4 000 ans plus tard...

(2). Wikipedia - page « Statistique » consultée le 15 février 2021.

(3). Blaise Pascal (1623-1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.

(4). Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874) est un mathématicien, astronome, naturaliste et statisticien belge, précurseur de l'étude démographique et fondateur de l'observatoire royal de Belgique.

(5). Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) est un biologiste et statisticien britannique.

(6). John Wilder Tukey (1915-2000) est l'un des plus importants statisticiens américains du siècle dernier.

Chapitre 2

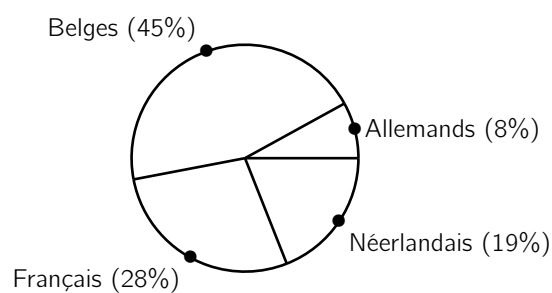
Terminologie

Pour pouvoir travailler la statistique (et les statistiques), il faut connaître un minimum de définitions, ce que j'appellerai la terminologie.

2.1 Exemple – Auberge de jeunesse

Une auberge de jeunesse effectue une étude sur sa fréquentation au mois d'août sur 200 personnes. Voici quelques résultats :

2.1.1 Nationalité des résidents



2.1.2 Durée du séjour

Nombre de jours	Effectif
1	56
2	83
3	43
4	18

2.1.3 Âge des résidents

Âge	Effectif
[18 ; 20 [	24
[20 ; 22 [	35
[22 ; 24 [	55
[24 ; 26 [	42
[26 ; 28 [	27
[28 ; 30 [	17

D'ores et déjà, nous constatons que l'on peut regrouper et classer des informations (ou des valeurs) comme cela nous intéresse et que l'on peut aussi les présenter de diverses manières (en tableau ou en graphique, par exemple).

Tout au long de ce cours, nous utiliserons divers termes qu'il est bon de connaître, il en va de la bonne compréhension de ce cours.

Voici donc ces quelques petites définitions à connaître.

Population Le terme de population (au sens mathématique et non géographique du terme !) sera utilisé pour désigner *l'ensemble des personnes, des êtres vivants ou des objets sur lequel porte l'étude statistique*.

Effectif total Le nombre total d'individus composant cette population est appelé effectif total de la population.

Caractère On appellera caractère *la propriété observée sur la population*.

Vous apprendrez également à réaliser des tableaux présentant les résultats observés, ceux-ci constituant une (ou des) série(s) statistique(s). Les séries statistiques peuvent être à caractère quantitatif ou qualitatif, discrètes ou classées et chronologiques ou non.

Statistiques à une variable : tableaux et graphiques

3.1 Série statistique

Les séries statistiques sont, par facilité, représentées sous la forme d'un tableau. Il est bon de rappeler qu'elles peuvent être à caractère qualitatif (couleur des yeux, métier pratiqué, loisirs préférés, prénom,...), quantitatif discret (taille, poids, moyenne générale au bulletin, quantité d'argent de poche, nombre d'amis sur un réseau social déterminé, température extérieure à 8h du matin,...) ou quantitatif classé.

3.2 Tableau brut

Le premier résultat de dépouillement de données est une suite de valeurs notées dans un tableau, au fur et à mesure que celles-ci se présentent. Le tableau ainsi créé est appelé un tableau brut.

3.2.1 Activité – Loisirs

Dans une classe de 15 élèves, on a réalisé une enquête relative à leurs loisirs préférés. Les résultats donnent lieu au tableau brut suivant :

Sport	T.V.	Lecture	Sortie	T.V.
T.V.	Sortie	Sortie	Shopping	Sortie
Lecture	Sortie	Lecture	Sortie	Lecture

Sur base du tableau brut ci-dessus, on demande :

- * Population :
- * Effectif total :
- * Caractère :
- * Modalités :

3.3 Tableau recensé

Pour pouvoir trier des informations d'un tableau brut, il est nécessaire d'établir tout d'abord un tableau résumé et clair, appelé tableau recensé.

3.3.1 Série discrète à caractère qualitatif

Reprenons l'exemple précédent.

Dans le tableau brut ci-dessus, on rencontre plusieurs fois une même **modalité**. Celle-ci sera notée x_i .

Le nombre de fois que la modalité x_i apparaît dans le tableau brut est appelé **effectif** de x_i et noté n_i .

La **fréquence** d'une modalité x_i , notée f_i , est le rapport $\frac{n_i}{n}$ (n étant l'effectif total). Dans ce cours, les fréquences seront généralement exprimées en pourcentage ⁽¹⁾ et arrondies à deux décimales (arrondi « commercial »).

Complétons le tableau suivant :

Modalités (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)
Sport		
T.V.		
Lecture		
Shopping		
Sortie		
Somme :		

(1). Il est donc obligatoire de calculer la fréquence comme suit : $f_i = \frac{n_i}{n} \cdot 100$.

3.3.2 Série discrète à caractère quantitatif

Activité – L'interrogation

Lors d'une interrogation, les résultats ont été les suivants (les notes sont sur 10) :

6	8	4	6	5	7	8	5	6	4
7	4	6	5	7	10	5	6	5	4
6	8	4	7	7	5	4	5	6	6
4	4	7	3	5	8	8	4	3	6
7	6	4	6	7	8	9	6	7	7
4	5	8	4	2	3	6	2	4	7
8	2	3	7	4	7	7	6	5	5
3	5	4	6	6	5	7	4	7	5
8	5	5	8	4	8	4	6	9	8
6	1	4	8	7	5	3	6	4	7
5	4	5	6	5	7	4	5	7	5
6	6	1	3	1	2	3	3	7	6

Dans le cas d'une série discrète à caractère quantitatif, les **modalités** seront rangées par ordre **croissant**.

On définit ensuite les notions d'effectif x_i et de fréquence f_i d'une modalité de la même façon que précédemment. De plus, le nombre de données du tableau brut inférieures ou égales à x_i est appelé **effectif cumulé** de x_i et est noté N_i . L'effectif cumulé de x_i est donc égal à la somme des effectifs de toutes les modalités allant de x_1 à x_i .

La **fréquence cumulée** d'une modalité x_i , notée F_i , est le rapport $\frac{N_i}{n}$. Rappelons que n est l'effectif total et que la fréquence doit être multipliée par 100 pour l'avoir en pourcentage.

On obtient alors le tableau recensé suivant :

Modalités (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)	Effectifs cumulés (N_i)	Fréquences cumulées (%) (F_i)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

3.3.3 Série classée

Activité – Spectacle

Le tableau suivant donne les âges des spectateurs relevés lors d'un spectacle dans une petite salle :

20	41	29	33	8	67	19	41	37	43
19	37	20	18	38	33	22	39	20	23
42	38	17	18	21	38	27	23	52	40
23	21	40	22	38	19	17	45	23	26
35	37	24	25	17	35	35	21	37	22
20	39	33	38	21	42	27	40	18	37
28	22	38	23	32	18	41	24	20	21
40	19	18	35	37	20	20	21	38	22
17	32	45	18	24	21	45	35	48	40
39	25	38	22	19	20	48	42	45	59
38	24	26	38	21	23	37	19	39	22
19	21	37	17	35	33	45	23	31	40
19	22	25	21	29	25	40	19	27	48

La réalisation du tableau recensé, effectué de la même manière que précédemment, donne lieu au tableau recensé de la page suivante.

Modalités (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)	Effectifs cumulés (N_i)	Fréquences cumulées (%) (F_i)
8	1	0,769	1	0,769
17	5	3,846	6	4,615
18	6	4,615	12	9,231
19	9	6,923	21	16,154
20	8	6,154	29	22,308
21	10	7,692	39	30,000
22	8	6,154	47	36,154
23	7	5,385	54	41,538
24	4	3,077	58	44,615
25	4	3,077	62	47,692
26	2	1,538	64	49,231
27	3	2,308	67	51,538
28	1	0,769	68	52,308
29	2	1,538	70	53,846
31	1	0,769	71	54,615
32	2	1,538	73	56,154
33	4	3,077	77	59,231
35	5	3,846	82	63,077
37	8	6,154	90	69,231
38	10	7,692	100	76,923
39	5	3,846	105	80,769
40	7	0,769	112	86,154
41	3	2,308	115	88,462
42	3	2,308	118	90,769
43	1	0,769	119	91,538
45	5	3,846	124	95,385
48	3	2,308	127	97,692
52	1	0,769	128	98,462
59	1	0,769	129	99,231
67	1	0,769	130	100,000

Une erreur s'est glissée dans ce tableau. La retrouverez-vous rapidement ?

Ce tableau recensé, trop détaillé, ne donne pas une vision globale du caractère relevé. Ainsi, dans ce cas, on peut regrouper les résultats dans des intervalles appelés classes ; on obtient alors la série classée suivante :

Classes	[5 ;15[	[15 ;25[	[25 ;35[	[35 ;45[	[45 ;55[	[55 ;75[
Effectifs	1	57	19	42	9	2

Constatations :

- * Lorsque les résultats sont regroupés en classes, on ne connaît plus la valeur exacte des résultats relevés à l'intérieur de chaque classe.
- * Toutes les classes ne doivent pas nécessairement avoir la même « longueur ».

Nous avons déjà vu précédemment les notions d'effectifs, d'effectifs cumulés, de fréquences et de fréquences cumulées. Pour pouvoir réaliser un tableau recensé complet d'une série classée, il est bon d'y ajouter deux notions importantes :

- * l'**amplitude** (ou longueur) de la classe, que l'on calcule en faisant la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de la classe considérée ;
- * le **centre** de la classe est calculé en effectuant la moyenne arithmétique entre les bornes de la classe considérée.

On obtient alors le tableau recensé d'une série classée :

Classes						
[5 ;15[						
[15 ;25[						
[25 ;35[						
[35 ;45[						
[45 ;55[						
[55 ;75[						

Avant de passer aux exercices, nous rappellerons que le but d'une étude statistique est, non seulement, de réorganiser un ensemble de données et de les décrire mais surtout de les résumer.

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités à (ré)organiser les données dans des tableaux. Nous apprendrons à les décrire (et les résumer) aux deux chapitres suivants grâce aux paramètres de position et de dispersion.

Nous allons maintenant voir une méthode qui permet de présenter les données sous une forme particulière : les graphiques.

3.4 Graphiques

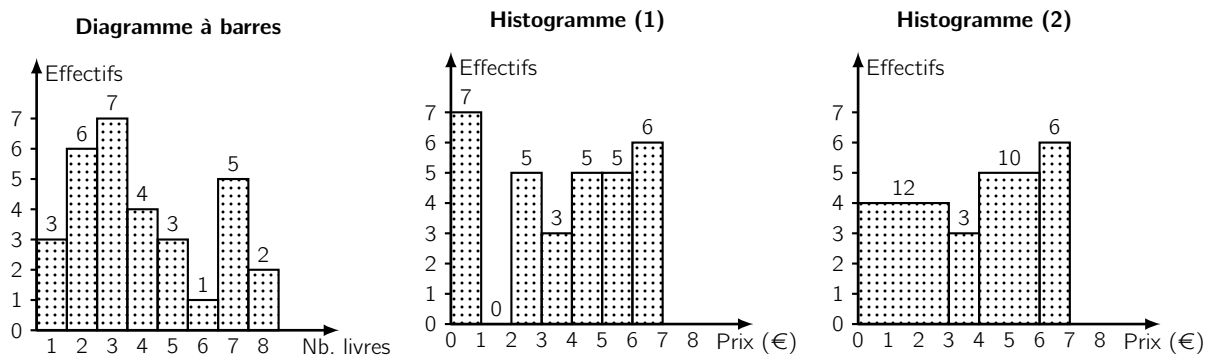
Les résultats obtenus par une étude statistique peuvent être représentés sous forme de tableaux (recensés) mais également sous forme de graphiques. Ceux-ci sont très souvent des diagrammes à bâtonnets ou à barres (dits aussi à rectangles) ou des diagrammes à secteurs. Ils représentent des données issues de séries discrètes. Pour décrire une série classée, les types de graphiques utilisés seront préférentiellement des histogrammes ou des polygones.

3.4.1 Histogramme

Avant d'aller plus en avant, il est bon de fixer les idées quant à la différence entre un diagramme à barres et un histogramme. Même si ceux-ci se ressemblent beaucoup, la règle utilisée pour les réaliser est différente.

Le principe utilisé dans la réalisation d'un **diagramme à barres** est la représentation des données en rectangles dont les bases sont de largeurs constantes et les hauteurs proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences.

Quant à l'**histogramme**, le principe pour le réaliser paraît similaire mais il y a une différence fondamentale : les bases correspondent aux amplitudes des classes et les aires sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences. Voici des exemples pour les différencier :



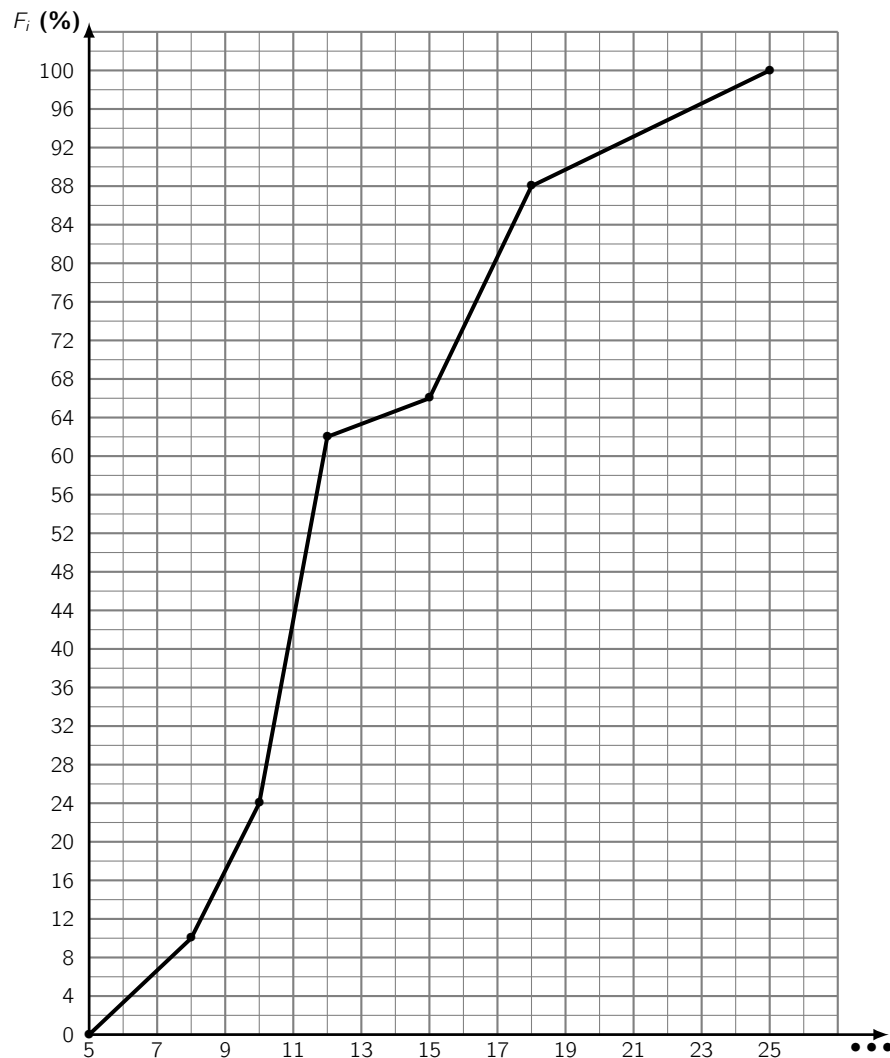
3.4.2 Polygone

Le principe pour réaliser un polygone, on supposera qu'au sein de chaque classe, tous les résultats sont répartis uniformément. On reliera donc, par des segments de droite, les points dont :

- * L'abscisse est la limite inférieure d'une classe.
- * L'ordonnée est l'effectif cumulé, ou la fréquence cumulée, de cette classe.

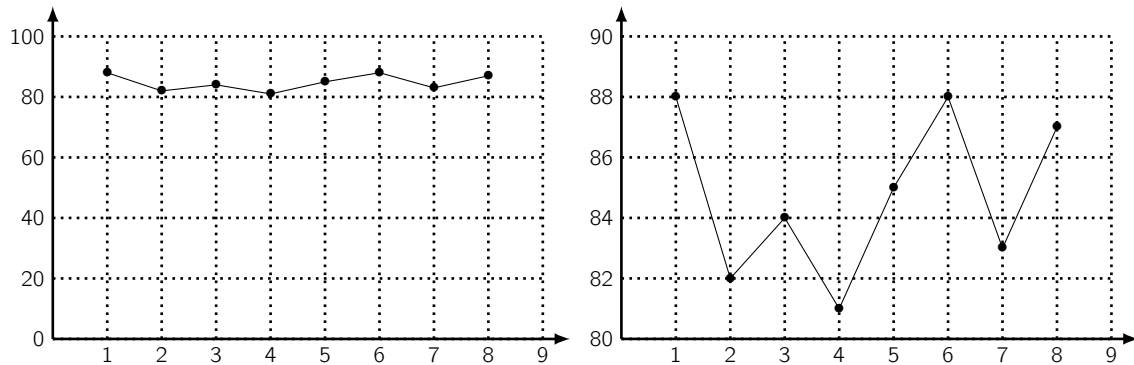
Il est à remarquer que la classe précédant la première classe étant inexistante, l'origine du segment de droite de la première classe aura donc pour origine 0 (zéro), sur l'ordonnée.

Exemple de polygone (ici, de fréquences cumulées)

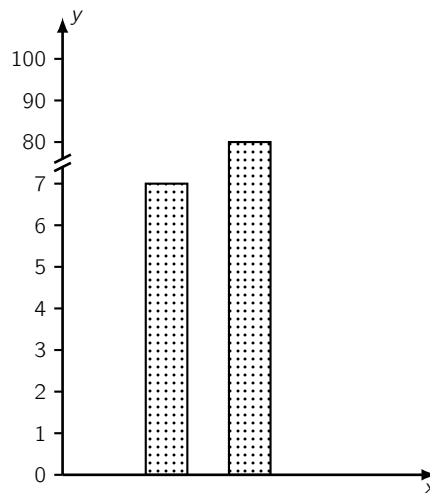


3.4.3 Attention aux échelles !

Lorsque vous êtes face à un graphique, son importance ne se limite pas à son contenu mais à l'ensemble du graphique, axes compris. En effet, dans les deux graphes ci-dessous, ce sont les mêmes données qui y sont représentées mais le graphe de droite nous donne l'impression d'une plus grande fluctuation des valeurs.

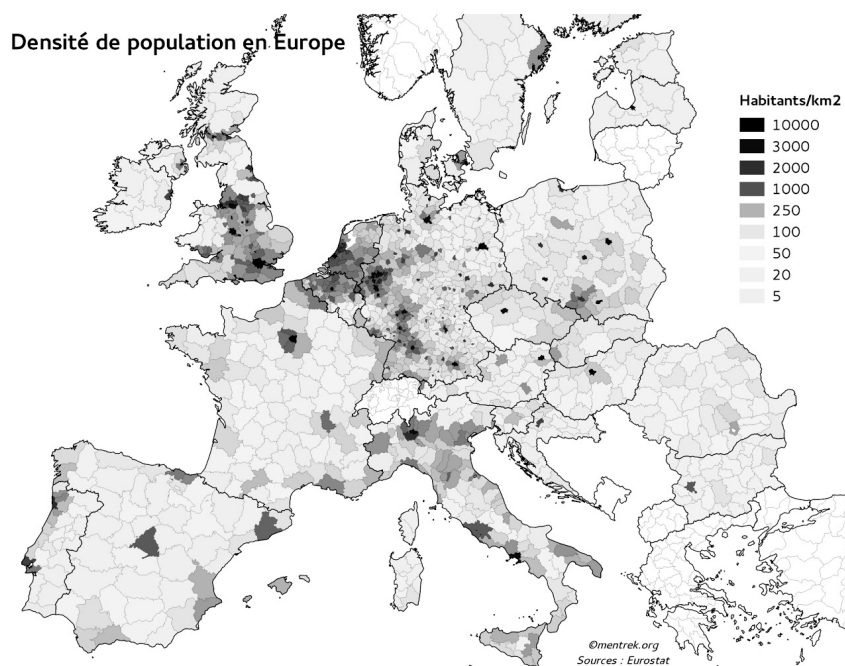


Le graphe ci-dessous nous trompe également : la différence entre les deux valeurs nous paraît insignifiante et pourtant elle est gigantesque.



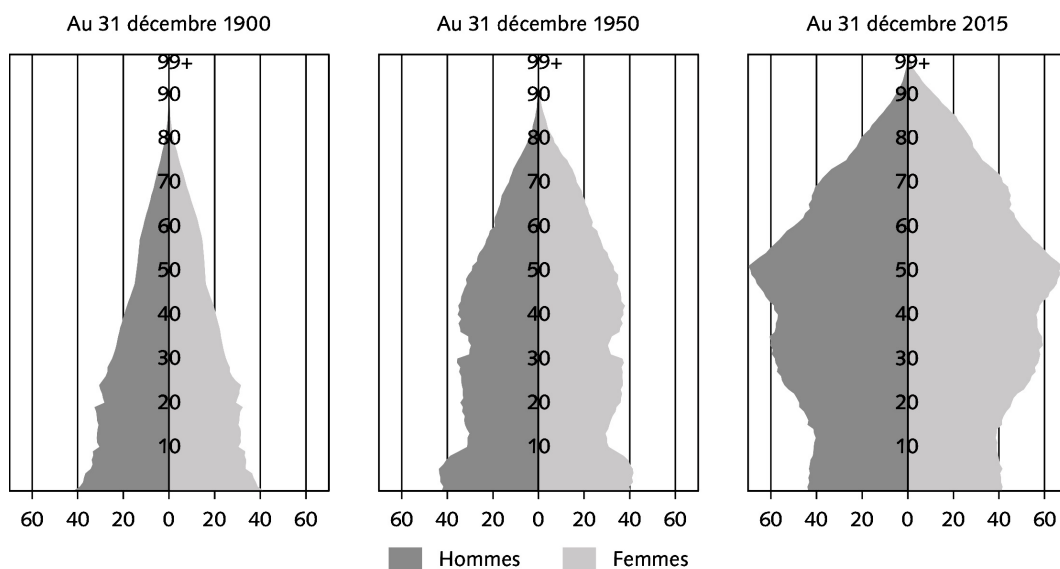
Il existe d'autres types de représentation graphique, généralement plus adaptés au sujet traité : la pyramide des âges, l'indice de masse corporelle, la densité de population, la production de lait par région,...

Voici quelques représentations graphiques afin d'en montrer la diversité.



Pyramide des âges

Nombre de personnes en milliers



Sources : OFS – RFP, STATPOP

© OFS, Neuchâtel 2016

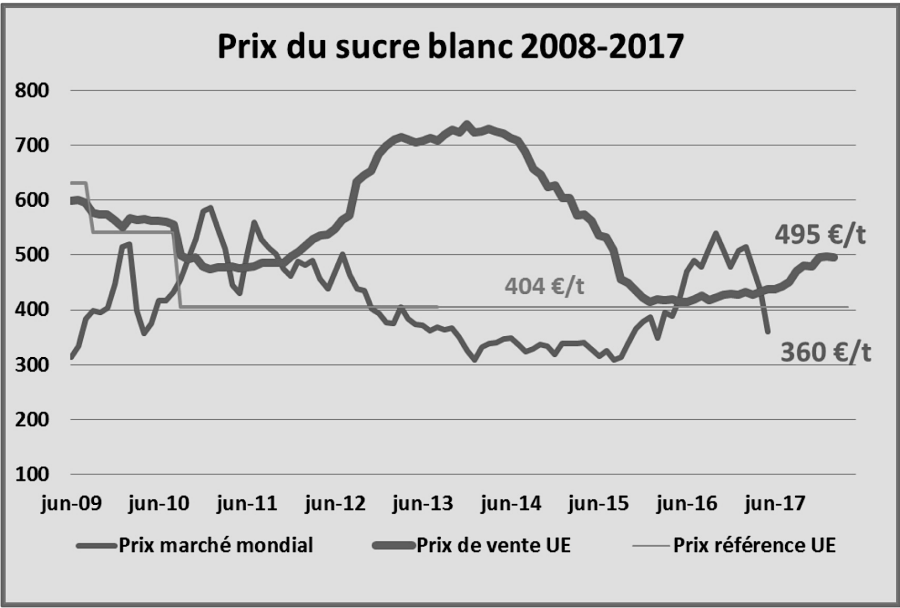
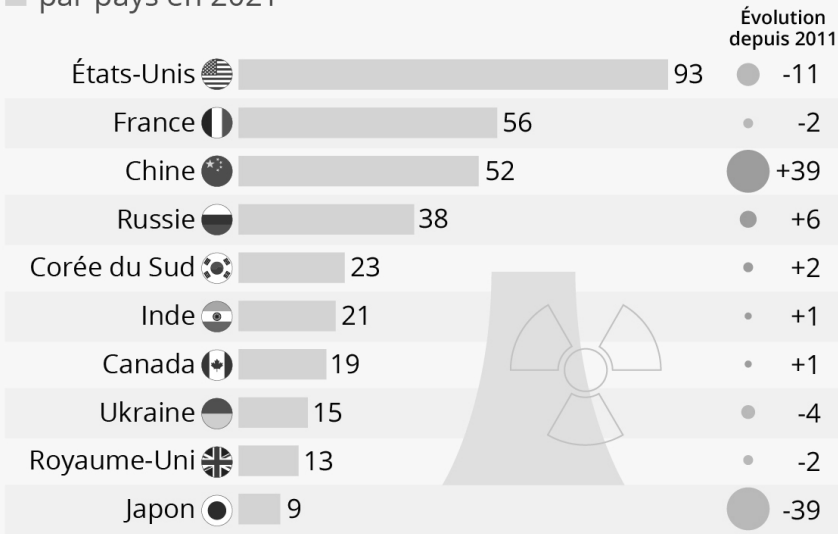


Tableau des jauges
Ventes régionales



Les pays avec le plus de réacteurs nucléaires

Nombre de réacteurs nucléaires en exploitation
par pays en 2021



Source : World Nuclear Industry Status Report 2021



statista

3.5 Exercices

Remarque : Pour l'ensemble des exercices, toute valeur comportant des décimales sera arrondie au centième près (arrondi commercial à 2 décimales).

Exercice 1

Le tableau suivant donne la population belge au 1^{er} janvier 2021 ^a.

Régions	Nombre d'habitants
Bruxelles	1 214 550
Flandres	6 647 506
Wallonie	3 645 107

1. Déterminer : population, caractère et modalités.
2. Établir le tableau recensé (x_i , n_i , f_i %) correspondant.

^a. Source : https://www.ibz.rn.fgov.be/fileadmin/user_upload/fr/pop/statistiques/population-bevolking-20210101.pdf

Exercice 2

En 2015, le nombre de travailleurs (tous secteurs confondus) en Belgique était de 4 544 milliers de personnes. Leur répartition était la suivante :

Secteurs	?
Secteur primaire (agriculture)	1,3 %
Secteur secondaire (industrie)	21,0 %
Secteur tertiaire (commerce, transport, finances, ...)	42,3 %
Secteur quaternaire (soins de santé, enseignement, ...)	35,4 %

1. Déterminer : population, caractère et modalités.
2. Établir le tableau recensé (x_i , n_i , f_i %) correspondant.

Exercice 3

Le tableau suivant donne la répartition de 125 agences de voyage selon leur nombre d'employés.

Nb. d'employés	Nb. d'agences	Fréquence (%)
1	22	?
2	?	28,0
3	45	?
4	?	14,4
5	5	?

- Déterminer : population, caractère et modalités.
- Établir le tableau recensé (x_i , n_i , f_i %, N_i , F_i %) correspondant sans oublier d'y indiquer le nom des colonnes.
- Quel est le pourcentage d'agences occupant :
 - * exactement 3 employés ?
 - * au plus 4 employés ?
 - * moins de 3 employés ?
 - * au moins 4 employés ?

Exercice 4

Lors d'un sondage, il a été demandé à un panel de jeunes de 18 à 20 ans la durée (en minutes) qu'ils passaient quotidiennement sur les réseaux sociaux.

Les résultats sont centralisés dans le tableau suivant.

Durée (min)	Nb. élèves
[0 ;30[	37
[30 ;60[	80
[60 ;90[	220
[90 ;120[	218
[120 ;150[	130
[150 ;180[	74
[180 ;210[	182
[210 ;240[	46
[240 ;270[	7

1. Déterminer : population, effectif total et caractère.
2. Établir le tableau recensé (Classes, x_i , n_i , f_i %, N_i , F_i %) correspondant sans oublier d'y indiquer le nom des colonnes.

Exercice 5

On a relevé le montant de 240 chèques remis à un guichet d'une agence bancaire :

Montant des chèques (€)	Effectif
[0 ; 500[	23
[500 ; 1000[	117
[1000 ; 1500[	59
[1500 ; 2000[	41

- Déterminer : population et caractère.
- Établir le tableau recensé (Classes, x_i , n_i , f_i %, N_i , F_i %) correspondant sans oublier d'y indiquer le nom des colonnes.
- Quel est le pourcentage de chèques dont le montant est :
 - * inférieur à 1.500 € ?
 - * supérieur à 1.500 € ?
 - * inférieur à 1.200 € ?
 - * inférieur à 800 € ?
 - * supérieur à 650 € ?
- Tracer le polygone des effectifs cumulés.

Exercice 6

Le tableau suivant donne le montant d'achats effectués sur un site d'e-commerce durant un week-end.

Montant (€)	Effectifs	Fréquences (%)	Effectifs cumulés
[0 ;250[	28		
[250 ;1000[		66	
[1000 ;1500[			324
[1500 ;2500[			400

- Déterminer : type de série, population et caractère.
- Établir le tableau recensé complet (Classes, amplitude, x_i , n_i , f_i %, N_i , F_i %) correspondant sans oublier d'y indiquer le nom des colonnes.
- Tracer le polygone des effectifs cumulés.
- Déterminer graphiquement le nombre d'achats dont le montant est :
 - * inférieur à 1500 € ;
 - * supérieur à 1250 € ;
 - * compris entre 250 € et 1500 € ;
- Vérifier, par calcul, les résultats ci-dessus.

Exercice 7

Le tableau suivant donne la taille d'adolescents se présentant à un casting pour une publicité.

Taille (cm)	Effectif
[160 ;163[	1
[163 ;166[	9
[166 ;169[	33
[169 ;172[	50
[172 ;175[	45
[175 ;178[	10
[178 ;190[	2

- Déterminer : population et caractère.
- Établir le tableau recensé (Classes, x_i , n_i , f_i %, N_i , F_i %) correspondant sans oublier d'y indiquer le nom des colonnes.
- Déterminer le pourcentage d'adolescents mesurant :
 - * moins de 175 cm ;
 - * plus de 169 cm ;
 - * moins de 165 cm ;
 - * plus de 173 cm.
- Tracer le polygone des fréquences cumulées.

Exercice 8

Soit le graphique suivant :

RÉSERVES PROUVÉES DE PÉTROLE BRUT DANS LE MONDE
EN TONNES, AU 1ER JANVIER 2019



Source : lafinancepourtous.com d'après INSEE

1. Déterminer : population, caractère et modalités.
2. Établir le tableau recensé (x_i , n_i , f_i %) correspondant.
3. Le tableau recensé pourrait-il contenir les colonnes des effectifs cumulés et des fréquences cumulées ? Justifier.

Exercice 9

Le tableau suivant classe la répartition des recettes (en pourcentage) de la Sécurité Sociale en France, en 1998 :

Sujet	Fréquence
Cotisations	68,2 %
Impôts et taxes	20,5 %
Autres (recettes du patrimoine immobilier, subventions État,...)	11,3 %

Construire le diagramme à secteurs (des fréquences) correspondant.

Statistiques à une variable : paramètres de position

Les paramètres de position permettent de préciser autour de quelle valeur sont dispersées les données d'une série statistique. Ces paramètres sont au nombre de trois : le mode, la moyenne et la médiane.

4.1 Mode

* Série discrète à caractère quantitatif

- On appelle *mode*, toute modalité dont l'effectif est maximal.

* Série classée

- On appelle *classe modale*, toute classe dont l'effectif est maximal.
- On appelle *mode*, le centre d'une classe modale.

Le mode (Mo) est donc la valeur la plus fréquente, c'est-à-dire la valeur obtenue par le plus grand nombre de sujets.

Il est à remarquer qu'une série statistique peut posséder un ou plusieurs modes ; on dira alors qu'elle est unimodale, bimodale, trimodale,...

Exemples

* Série discrète à caractère quantitatif

Voici l'extrait d'un tableau (déjà vu p.14) :

Modalités (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)
1	3	2,5
2	4	3,333
3	9	7,5
4	22	18,333
5	22	18,333
6	23	19,167
7	21	17,5
8	13	10,833
9	2	1,667
10	1	0,833

→ Mo =

* Série classée :

Voici l'extrait d'un autre tableau, déjà vu également (p.17)

Classes	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)
[5 ;15[	1	0,769
[15 ;25[	57	43,846
[25 ;35[	19	14,615
[35 ;45[	42	32,308
[45 ;55[	9	6,923
[55 ;75[	2	1,538

→ Classe modale :

→ Mo =

4.2 Moyenne

Dans une série statistique (discrète ou classée), la moyenne peut se calculer de deux manières différentes :

* Soit en utilisant les effectifs :
$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n}$$

* Soit en utilisant les fréquences :
$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{100}$$

Il est grandement recommandé d'utiliser la formule prenant en compte des valeurs fournies dans l'énoncé et non pas celles calculées.

Exemples

* **Série discrète à caractère quantitatif**

Voici l'extrait d'un tableau (déjà vu p.14) :

Modalités (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)
1	3	2,5
2	4	3,333
3	9	7,5
4	22	18,333
5	22	18,333
6	23	19,167
7	21	17,5
8	13	10,833
9	2	1,667
10	1	0,833

→ $\bar{x} =$

* **Série classée**

Voici l'extrait d'un autre tableau, déjà vu également (p.17)

Classes	Centres (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences (%) (f_i)
[5 ;15[	10	1	0,769
[15 ;25[	20	57	43,846
[25 ;35[	30	19	14,615
[35 ;45[	40	42	32,308
[45 ;55[	50	9	6,923
[55 ;75[	65	2	1,538

→ $\bar{x} =$

Remarque

La moyenne est un paramètre très souvent utilisé car elle est unique (contrairement au mode) et elle tient compte de tous les résultats (contrairement au mode, également), mais cela peut parfois être un inconvénient.

4.3 Médiane

La médiane (Me) est le résultat qui correspond à un effectif cumulé de $n/2$ ou à une fréquence cumulée de 50%. On appelle donc médiane la valeur centrale de la série statistique. Il s'agit de la valeur qui sépare l'ensemble des données ordonnées en deux groupes de même effectif.

Exemples

* **Série discrète à caractère quantitatif :**

Voici l'extrait d'un tableau (déjà vu p.14) :

x_i	n_i	N_i
1	3	3
2	4	7
3	9	16
4	22	38
5	22	60
6	23	83
7	21	104
8	13	117
9	2	119
10	1	120

Le principe est le suivant : on recherche $n/2$ dans la colonne des effectifs cumulés, et la médiane est la modalité correspondante.

→ Me =

Remarque : dans le cas où aucun effectif cumulé ne vaut $n/2$, on choisira l'effectif cumulé qui lui est directement supérieur (en valeur), et la médiane sera la modalité correspondante.

* **Série classée :**

Voici l'extrait d'un autre tableau, déjà vu également (p.17) :

Classes	Amplitudes	n_i	N_i
[5 ;15[	10	1	1
[15 ;25[	10	57	58
[25 ;35[	10	19	77
[35 ;45[	10	42	119
[45 ;55[	10	9	128
[55 ;75[	20	2	130

Le principe est le suivant : on va déterminer la classe médiane dans laquelle les N_i atteignent la valeur de $n/2$.

→ classe médiane :

Puis, dans la classe médiane, on calcule la valeur de la médiane par interpolation linéaire avec la formule suivante :

$$Me = \text{borne inf cl méd} + \frac{\text{ampl cl méd}}{\text{eff cl méd}} \cdot \left(\frac{n}{2} - \text{eff cumul cl précéd} \right)$$

Avec :

- * « borne inf cl méd » : Borne inférieure de la classe médiane ;
- * « ampl cl méd » : Amplitude de la classe médiane ;
- * « eff cl méd » : Effectif de la classe médiane ;
- * « eff cumul cl précéd » : Effectif cumulé de la classe précédente.

→ Me =

4.4 Exercices

Exercice 1

Une entreprise, spécialisée dans la rénovation intérieure d'appartements, désire faire quelques statistiques sur la durée de ses interventions. Les résultats de son enquête, réalisée sur deux mois, sont consignés dans le tableau suivant.

Durées (jours)	1	2	3	4	5
Effectifs	250	220	154	78	25

- Déterminer le mode puis calculer la moyenne et la médiane.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne le nombre de buts marqués par match au cours du premier week-end du mois d'avril en division 1 nationale, provinciale et corporative.

Nb. buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13
Nb. matches	4	20	35	23	15	20	6	6	2	1	1	1

Avant de se lancer dans les calculs demandés, je conseille de réaliser le tableau recensé (x_i , n_i , f_i %, N_i , F_i %).

1. Calculer $\bar{x}$, Mo et Me à partir des effectifs.
2. Calculer $\bar{x}$, Mo et Me à partir des fréquences.
3. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 3

Le tableau suivant donne la taille (en cm) de 150 adolescents se présentant à un casting pour une publicité.

Taille (cm)	$[160;163[$	$[163;166[$	$[166;169[$	$[169;172[$	$[172;175[$	$[175;178[$	$[178;190[$
Effectifs	1	9	33	50	45	10	2

1. Déterminer la classe modale et le mode.
2. Calculer $\bar{x}$.
3. Tracer le polygone des effectifs cumulés et y lire une valeur approximative de Me .
4. Calculer Me par interpolation linéaire.

Exercice 4

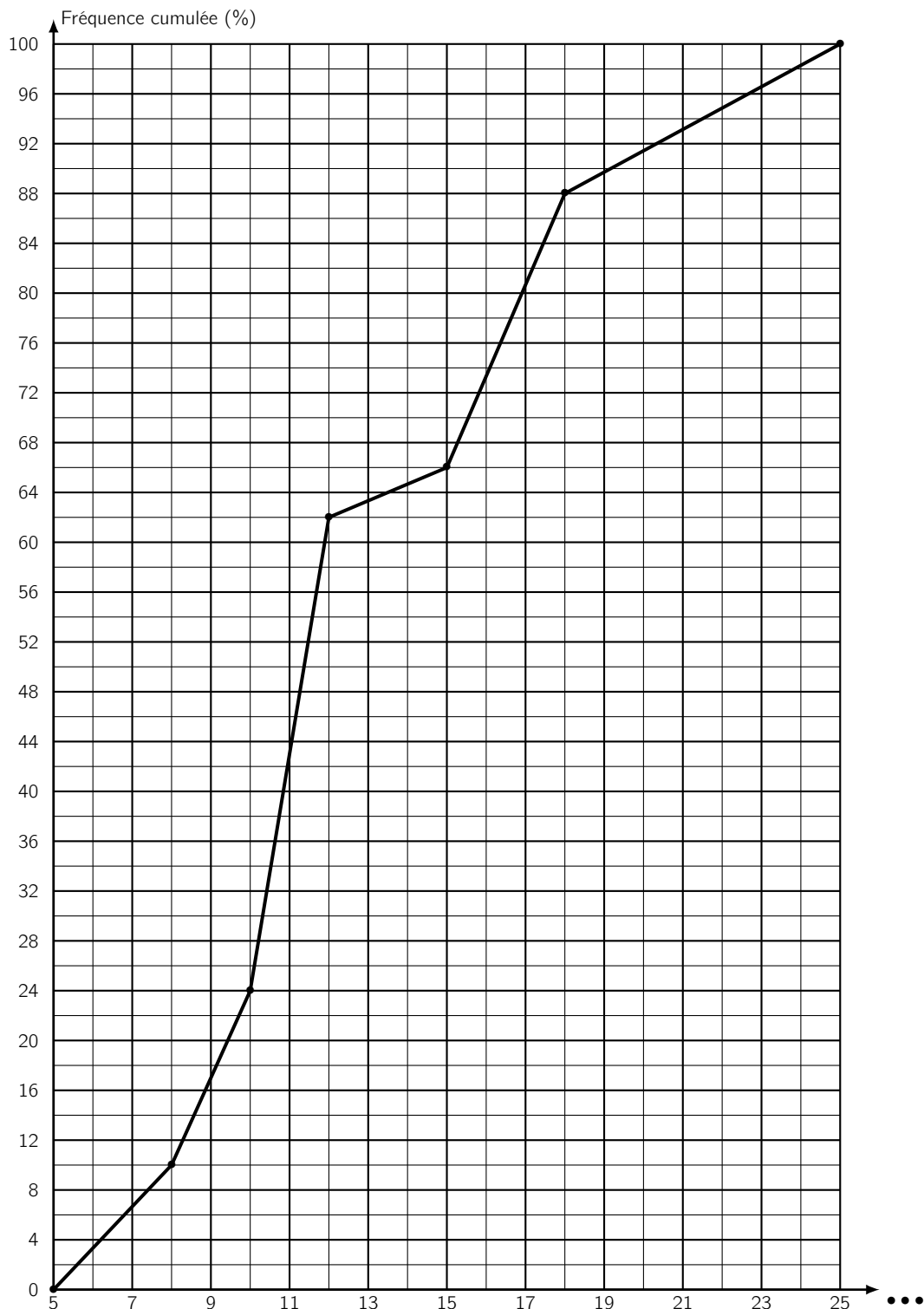
Le tableau suivant donne le salaire horaire des employés d'une entreprise.

Salaire (€)	$[10,00;10,25[$	$[10,25;10,50[$	$[10,50;10,75[$	$[10,75;11,00[$	$[11,00;11,25[$	$[11,25;11,50[$	$[11,50;11,75[$	$[11,75;12,00[$
Effectifs	6	8	16	76	36	16	7	2

1. Déterminer le mode et la moyenne.
2. Calculer Me par interpolation linéaire, à partir des effectifs et à partir des fréquences.
3. Vérifier la valeur obtenue ci-dessus sur un graphique.

Exercice 5

Le graphe suivant montre l'évolution d'une fréquence cumulée.



1. De quel type de graphe s'agit-il ?
2. Établir le tableau recensé (Classes, f_i %, F_i %) correspondant.
3. Calculer $\bar{x}$, M_o et M_e .

Statistiques à une variable : paramètres de dispersion

5.1 Activité – Résultats scolaires

Un enseignant désire comparer les résultats d'une évaluation (/20) dans deux classes. Pour ce faire, il calcule la moyenne arithmétique des résultats. Mais cette moyenne suffit-elle, à elle seule, pour décrire de manière globale les résultats des élèves... ?

Dans chaque classe, il y a 15 élèves et les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Classe 1		Classe 2	
x_i	n_i	x_i	n_i
2	2	5	3
5	1	8	1
7	2	10	1
9	1	12	2
11	2	14	3
18	7	15	5
Moy. : 12		Moy. : 12	

Les moyennes arithmétiques sont donc égales, alors qu'il y a eu une nette différence dans les résultats ! Ceux de la classe 1 sont plus dispersés que ceux de la classe 2.

Cet exemple prouve la nécessité de caractériser une série statistique, non seulement par un paramètre de position (mode, moyenne et médiane), mais également par un paramètre de dispersion qui mesure le degré de confiance que l'on peut accorder au paramètre de position calculé.

5.2 Variance et écart-type

Si l'on désire étudier la dispersion des résultats autour de la moyenne, l'idée qui vient est de calculer l'écart moyen entre ces résultats et la moyenne.

On définit ainsi :

5.2.1 La variance

La variance correspond à la moyenne des carrés des différences entre les observations et leur moyenne.

Elle peut se calculer de deux manières différentes ⁽¹⁾

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

ou

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

5.2.2 L'écart-type

Il s'interprète mieux que la variance, car il donne les unités utilisées dans l'échelle originale et non dans leur forme au carré.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Reprenons le tableau du début de chapitre et calculons l'écart-type de chacune des classes.

(1). Il ne sera pas fait ici la « démonstration » de l'équivalence des deux formules, cela sort du cadre de ce cours. Par contre, tu peux la trouver sur mon site...

Calcul de l'écart-type pour la classe 1

Formule utilisée :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

* Rappel, la moyenne est de 12

* On complète le tableau et on obtient :

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
2	2	-10	100	200
5	1	-7	49	49
7	2	-5	25	50
9	1	-3	9	9
11	2	-1	1	2
18	7	6	36	252

Somme = 562

* Somme des $n_i (x_i - \bar{x})^2$: 562

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{15} \cdot 562 = 37,46...$

* Calcul de σ : $\sigma = \sqrt{37,46...} = 6,12$

Calcul de l'écart-type pour la classe 2

Formule utilisée :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

* Rappel, la moyenne est de 12

* On complète le tableau et on obtient :

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
7	3	-5	25	75
8	1	-4	16	16
10	1	-2	4	4
12	2	0	0	0
14	3	2	4	12
15	5	3	9	45

Somme = 152

* Somme des $n_i (x_i - \bar{x})^2$: 152

* Calcul de σ^2 : $\sigma^2 = \frac{1}{15} \cdot 152 = 10,13...$

* Calcul de σ : $\sigma = \sqrt{10,13...} = 3,18$

Nous constatons que l'écart-type de la classe 1 (6,12) est plus grand que celui de la classe 2 (3,18). Cela signifie que les données sont plus dispersées dans la classe 1 que dans la classe 2. C'est ce que l'on a déjà pu constater dans le tableau du début du chapitre.

5.3 Quartiles, déciles et centiles

Nous avons vu que la médiane divise une série statistique ordonnée en deux parties de même effectif. De manière analogue, les quartiles divisent la série statistique en quatre parties de même effectif, les déciles la divisent en dix parties de même effectif et les centiles en cent parties de même effectif.

Rappelons-nous que la médiane (Me) est le résultat qui correspond à un effectif cumulé de $n/2$ ou à une fréquence cumulée de 50 %.

Sur le même principe :

- * Le 1^{er} quartile, noté Q_1 , est le résultat qui correspond à un effectif cumulé de $n/4$ ou à une fréquence cumulée de 25 %.
- * Le 3^e quartile, noté Q_3 , est le résultat qui correspond à un effectif cumulé de $3n/4$ ou à une fréquence cumulée de 75 %.

L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$.

L'écart interquartile est l'amplitude de cet intervalle.

L'intervalle interquartile contient donc 50 % de l'effectif total dont les valeurs sont les plus proches de la médiane.

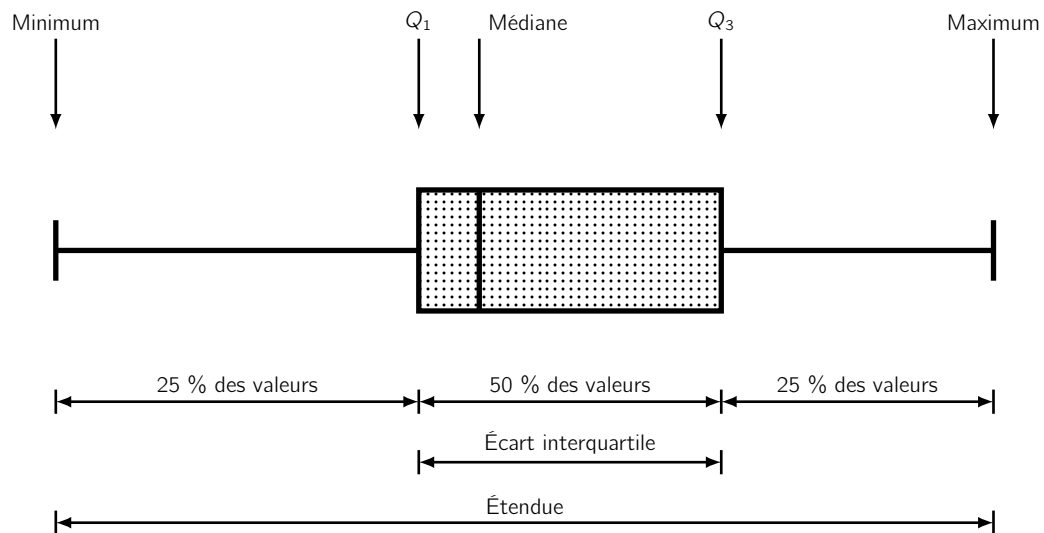
L'écart interquartile est donc une mesure de la dispersion des données autour de la médiane : plus il est grand, plus les données sont dispersées autour de la médiane ; plus il est petit, plus les données en sont proches.

5.4 Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre ses valeurs extrêmes.

5.5 Boîte à moustaches

Les différentes caractéristiques vues jusqu'à présent peuvent être « résumées » par une boîte à moustaches, aussi appelée *diagramme en boîte*, ou encore *diagramme de Tukey*⁽²⁾, du nom de son concepteur.



(2). John Wilder Tukey (1915-2000) est un statisticien américain.

5.6 Exercices

Exercice 1

Lors d'une étude de la qualité des eaux destinées à la consommation, on analyse le contenu de soixante flacons dont on détermine la concentration en nitrates en mg/l. Le tableau suivant résume les résultats de l'analyse :

Concentration (mg/l)	45,8	46,6	47,0	47,5	48,2	49,2	49,5	50,0	50,1	50,2
Nb. flacons	1	9	2	10	9	10	7	7	3	2

1. Déterminer le mode, la moyenne et l'écart-type.
2. Calculer la médiane.
3. Pour que l'eau soit propre à la consommation, sa concentration en nitrates doit être inférieure ou égale à 50 mg/l. Quel est le pourcentage de flacons contenant de l'eau impropre à la consommation ?

Exercice 2

Une auberge de jeunesse a effectué une étude sur sa fréquentation au mois d'août sur deux-cents personnes.

Le relevé des durées de séjour a donné les résultats suivants :

Nb jours	1	2	3	4	5
Fréquence (%)	28,0	31,5	29,0	7,5	4,0

Déterminer le mode, la moyenne, la médiane et l'écart-type.

Remarque : Bien regarder ce dont on a besoin en fonction de la formule utilisée !

Exercice 3

Le tableau suivant donne la répartition des voyageurs français (en 1990) selon leur taille en flux de vacanciers dans le marché métropolitain français. Cette étude ne concerne que les voyageurs ayant transporté plus de 15 000 personnes dans l'année.

Nb vacanciers (milliers)	$[15;25[$	$[25;50[$	$[50;75[$	$[75;100[$	$[100;150[$	$[150;200[$	$[200;500[$
Nb voyageurs	26	44	7	9	5	0	9

- Déterminer : population et caractère.
- Déterminer le pourcentage de voyageurs dont le flux de vacanciers fut :
 - * inférieur à 50 000
 - * compris entre 20 000 et 50 000
- Calculer $\bar{x}$ et σ
- Déterminer le mode.
- Calculer la médiane.
- Calculer les premier et troisième quartiles ; ensuite vérifier les valeurs obtenues pour Me , Q_1 et Q_3 sur un graphique.
- Calculer l'intervalle interquartile.
- Déterminer l'étendue de la série.
- Déterminer le pourcentage de voyageurs dont le flux de vacanciers fut supérieur à la moyenne.

Exercice 4

L'âge au 1^{er} janvier 1991 du personnel d'une entreprise liégeoise est repris dans le tableau suivant :

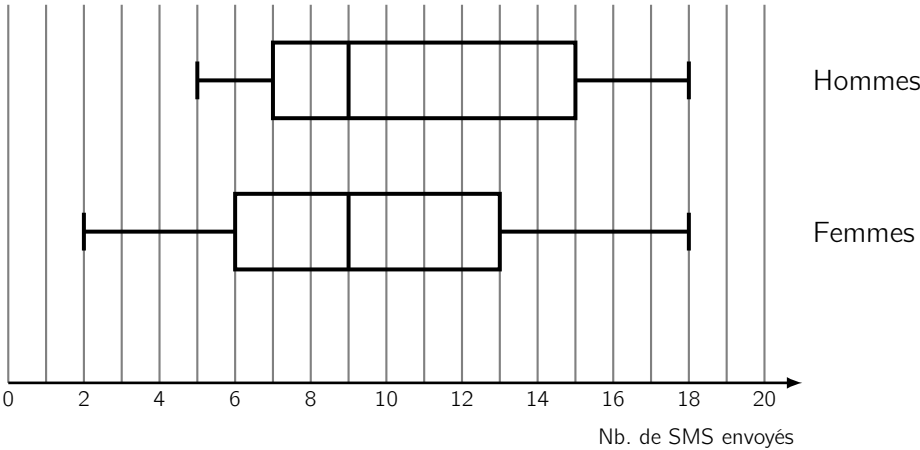
Âge des salariés	$[20;25[$	$[25;30[$	$[30;35[$	$[35;40[$	$[40;45[$	$[45;50[$	$[50;55[$	$[55;60[$	$[60;65[$
Hommes	10	26	44	52	38	20	17	7	0
Femmes	0	0	3	14	14	6	11	2	0

1. Déterminer Mo_H , Mo_F et Mo_{H+F} .
2. Calculer $\bar{x}_H$, $\bar{x}_F$ et $\bar{x}_{H+F}$.
3. Déterminer Me_H , Me_F et Me_{H+F} .
4. Calculer σ_H , σ_F et σ_{H+F} .
5. Calculer les intervalles interquartiles pour les H, les F et les H+F.

Exercice 5

Exercice sur deux pages !

On demande à un groupe de personnes le nombre de SMS envoyés en une journée.
Les résultats sont synthétisés par le diagramme ci-dessous :



1. Complète le tableau suivant :

	Hommes	Femmes
Valeur minimale		
Valeur maximale		
Valeur de la médiane		
Valeur de Q_1		
Valeur de Q_3		
Valeur de l'écart interquartile		
Valeur de l'étendue		

La suite de l'exercice se trouve page suivante...

2. Vrai ou faux ? Place une croix dans la case correspondante.

	VRAI	FAUX
La moitié des femmes a envoyé plus de 9 SMS en une journée.		
10 % des hommes ont envoyé entre 5 et 7 SMS.		
En moyenne, les hommes et les femmes ont envoyé le même nombre de SMS.		
La moitié des femmes a envoyé entre 6 et 13 SMS en une journée.		
50 % des hommes ont envoyé entre 9 et 18 SMS sur la journée.		
Un quart des hommes a envoyé entre 15 et 18 SMS.		
Un quart des femmes a envoyé entre 6 et 9 SMS.		

Statistiques à deux variables

6.1 Définition

On appelle série statistique à deux variables l'étude simultanée de deux caractères, comme par exemple la taille et le poids, les températures minimale et maximale,...

Il ne sera étudié dans ce cours que des séries statistiques dont les caractères seront quantitatifs.

6.2 Nuage de points

Les données obtenues lors d'expériences comportent souvent des erreurs dues à l'imprécision des mesures ou au processus expérimental. Lorsque les résultats sont portés en graphique, ils forment généralement ce que l'on appelle un nuage de points.

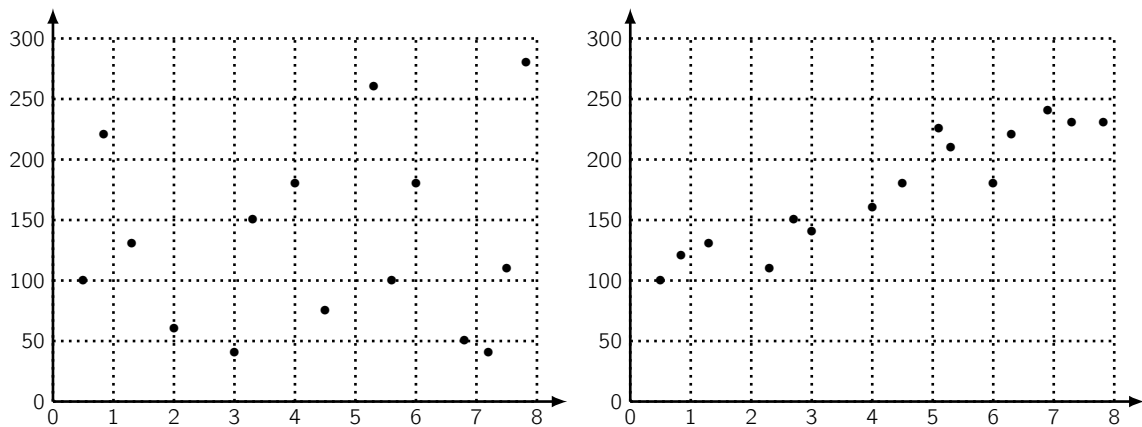
Le nuage de points est un graphique qui met en relation les valeurs de deux variables sur un repère de coordonnées cartésiennes.

Si, pour chacun des n individus d'une population, on note x_i et y_i les valeurs prises par les deux caractères, on peut alors les représenter sous la forme d'un tableau :

	M_1	M_2	M_3	...	M_n
Caractère x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Caractère y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

En plaçant l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal, ceux-ci constituent un nuage de points, associé à la série statistique à deux variables.

Le nuage de points est un bon indicateur pour vérifier une corrélation entre les caractères x et y . Si les points sont sous la forme d'un nuage, il est fort probable que les phénomènes ne soient pas corrélés. S'ils semblent, au contraire, dessiner une courbe, on cherchera à déterminer la nature de la courbe en procédant à un ajustement.



Dans le cas où la courbe est une droite, ce qui nous intéresse dans la présente partie du cours, on dira que l'on réalise une *régression linéaire*, également appelée *ajustement des moindres carrés*.

Quel que soit le domaine dans lequel on va réaliser une expérience, l'exploitation de résultats expérimentaux nécessite très souvent l'emploi de la régression linéaire. Cet outil permet notamment de valider un modèle théorique grâce aux données expérimentales.

Puisque la droite est la fonction mathématique la plus simple à manipuler, on cherchera toujours à tracer graphiquement une grandeur Y en fonction d'une grandeur X de telle sorte que le graphe $Y = f(X)$ soit une droite, donc d'équation $Y = aX + b$.

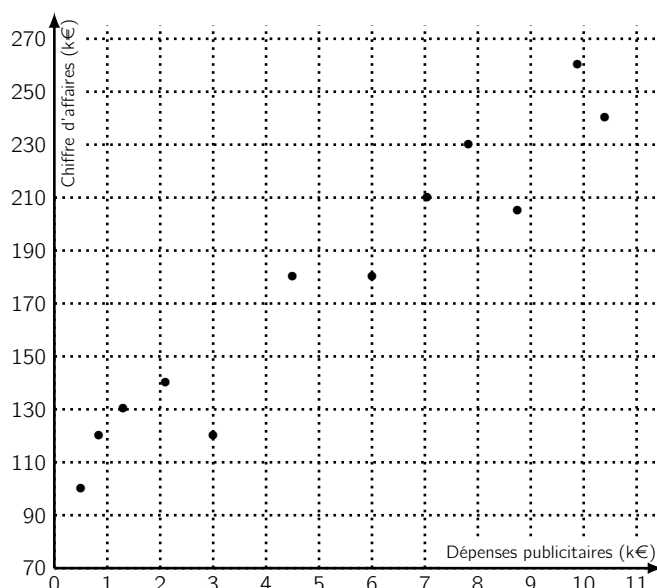
6.2.1 Exemple – Dépenses publicitaires

En tant qu'entrepreneur, je voudrais savoir s'il existe un lien entre mes dépenses mensuelles de publicité et mon chiffre d'affaires mensuel.

Je récolte donc les données mensuelles sur un an (en milliers d'euros) et les étudie :

Mois	Dépenses (k€)	Chiffre d'affaires (k€)
Janvier	7,04	210
Février	10,4	240
Mars	8,75	205
Avril	2,1	140
Mai	4,5	180
Juin	6	180
Juillet	3	120
Août	0,5	100
Septembre	0,84	120
Octobre	1,3	130
Novembre	7,82	230
Décembre	9,88	260

Vous conviendrez qu'un tel tableau ne nous apporte pas directement une réponse claire. Nous allons donc réaliser un graphique en forme de nuage de points du chiffre d'affaires en fonction des dépenses publicitaires, chacun exprimé en milliers d'euros.



6.3 Corrélation ou causalité ?

Il est important de ne pas confondre *corrélation* et *causalité*.

- Une corrélation est un lien, un rapport réciproque, entre deux variables statistiques.
- Une causalité est un lien qui s'établit entre une cause et son effet, c'est-à-dire une variable qui agit sur une autre.

Notons que la causalité implique toujours la corrélation alors que la corrélation n'implique pas la causalité. La nuance peut sembler ténue ; et pourtant elle est de taille :

- Le médecin suisse Franz Messerli montrait dans son article⁽¹⁾ cette corrélation entre la consommation de chocolat par habitant et par an et le nombre de prix Nobel pour 10 millions d'habitants. De là à dire que manger du chocolat rend les gens intelligents est un pas qu'il ne faut pas franchir. En effet, il y a une variable manquante : le niveau de vie. Celui-ci explique les dépenses en éducation et en recherche, augmentant ainsi les chances d'avoir des prix Nobel dans la population mais aussi le pouvoir d'achat qui permet de consommer du chocolat.
- Le lien entre une vitre brisée et un caillou qui la heurte est un lien de causalité : parce que le caillou a heurté la vitre, celle-ci s'est brisée.

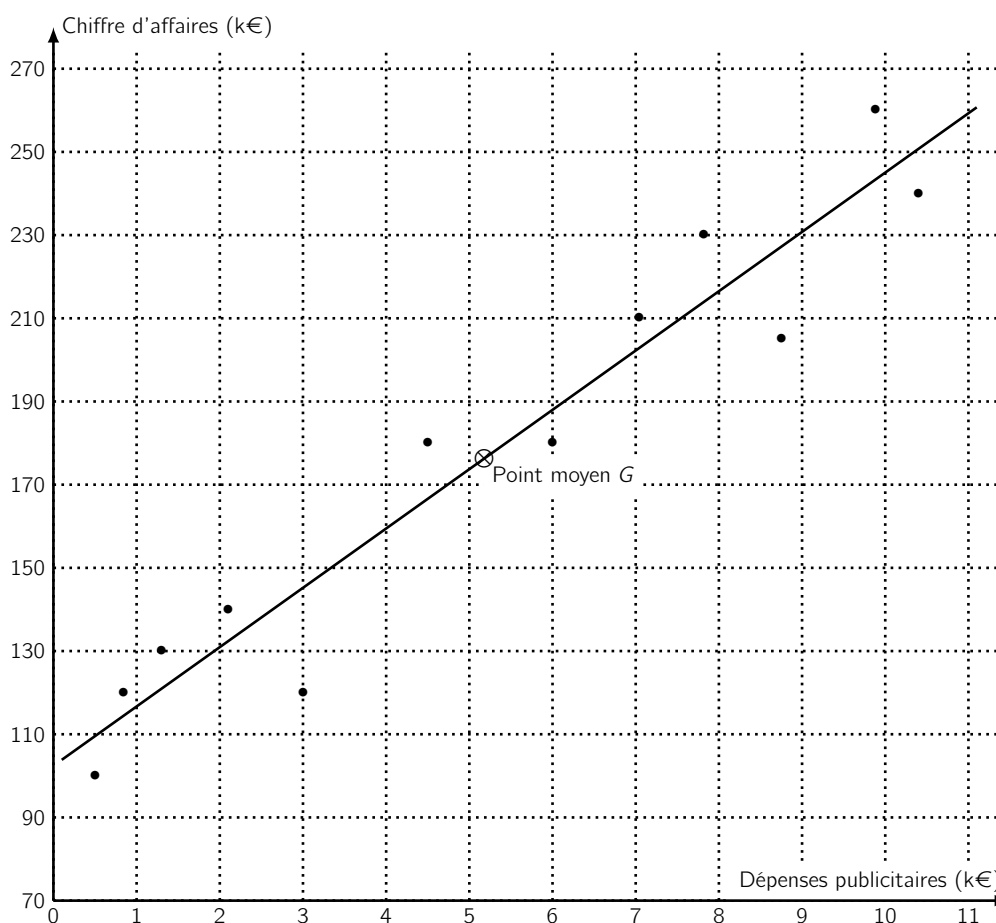
(1). Franz Messerli, « Chocolate Consumption, Cognitive Function, and Nobel Laureates », The New England Journal of Medicine, 2012.

6.4 Ajustement affine graphique

Nous remarquons qu'il semble exister un lien entre les dépenses publicitaires et le chiffre d'affaires. Ce lien pourrait (et c'est ce qui semble le plus logique) être une droite

Nous allons essayer de placer manuellement sur le graphique une droite qui passerait entre les points et qui serait la plus « correcte » possible. Comme le but est de pouvoir, par la suite, interpoler ou extrapoler les données, il faut connaître l'équation de la droite.

Cet ajustement affine graphique (c'est-à-dire effectué manuellement) sera réalisé en plaçant sur le graphe le point moyen $G^{(2)}$. La droite doit passer par ce point (3) et on essaie d'être le plus près possible de chacun des autres points, ce qui donne :

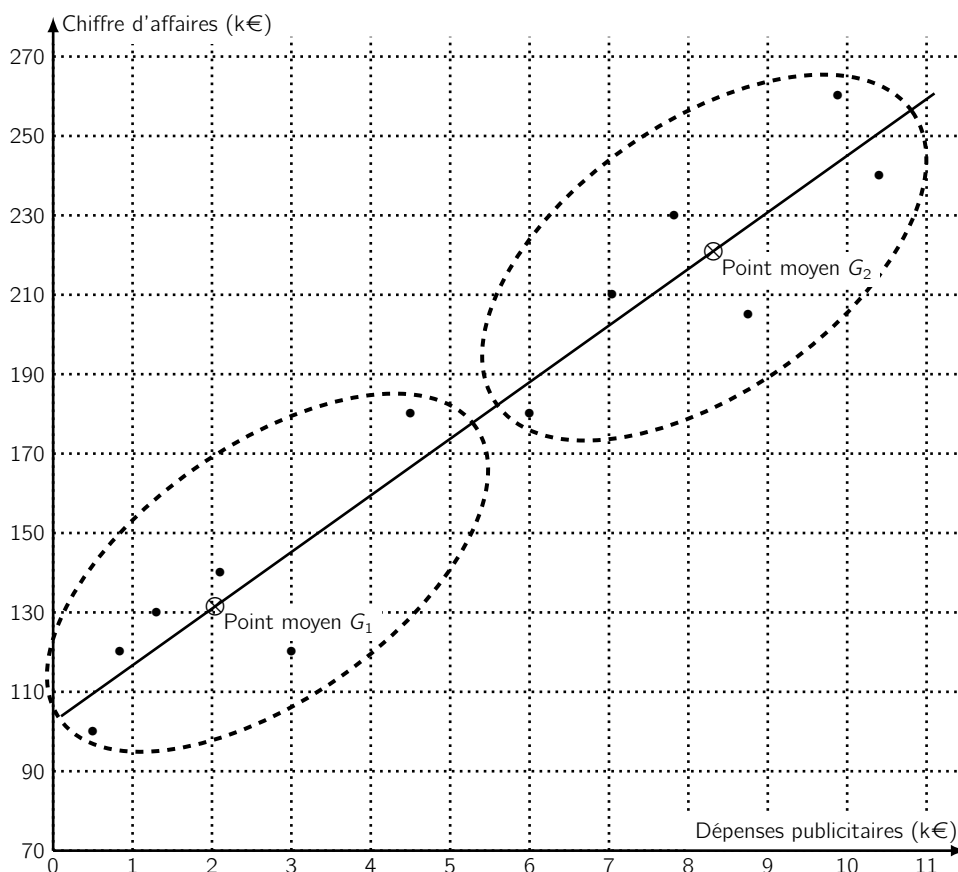


(2). Pour déterminer le point moyen G , on calcule la moyenne des coordonnées x et la moyenne des coordonnées y . Autrement dit : $G(\bar{x}; \bar{y})$. Il a été attribué la lettre G à ce point car il s'agit du centre de gravité du nuage de points.

(3). Le point moyen G a pour coordonnées $(5,1775 ; 176,25)$ et est représenté par une croix encadrée.

6.5 Droite de Mayer

La méthode de Mayer⁽⁴⁾ consiste à découper le nuage de points en deux sous-ensembles de même effectif. Pour chacun des deux sous-ensembles, on calcule la moyenne des x_i et celle des y_i . On obtient ainsi deux points moyens $G_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$ et $G_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$. Il reste à déterminer l'équation de la droite passant par ces deux points et à la représenter.



Pour rappel, voici la formule à utiliser pour déterminer aisément l'équation de la droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$d \equiv y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_B)$$

Ce qui revient, dans le cas qui nous intéresse, à déterminer l'équation de la droite passant par les points $G_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$ et $G_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$:

$$d \equiv y - \bar{y}_2 = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} \cdot (x - \bar{x}_2)$$

(4). Tobias Mayer (1723-1762) est un mathématicien, cartographe et astronome allemand.

6.6 Exercices

Exercice 1

Pour chaque couple de points, déterminer l'équation de la droite passant par ces points :

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $(0; 2) \& (-4; 9)$ | g) $(-1; 3) \& (2; 4)$ |
| b) $(3; -2) \& (-6; 4)$ | h) $(2; -1) \& (4; -3)$ |
| c) $(1; 7) \& (0; 4)$ | i) $(-4; -1) \& (-2; 5)$ |
| d) $(1; 3) \& (-2; 4)$ | j) $(3; 1) \& (1; 3)$ |
| e) $(2; 5) \& (-3; -7)$ | k) $(-2; 4) \& (1; 3)$ |
| f) $(-3; 1) \& (4; -2)$ | l) $(7; 7) \& (0; 0)$ |

Exercice 2

Pour chacune des séries statistiques suivantes, déterminer la droite de Mayer.

- Série 1 :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	24,4	26,3	27,8	29,5	30,7	32,8	34,4	35,7

- Série 2 :

x_i	3	7	1	20	12	11	14	6	10	9
y_i	105	104	118	79	90	92	91	109	103	100

- Série 3 :

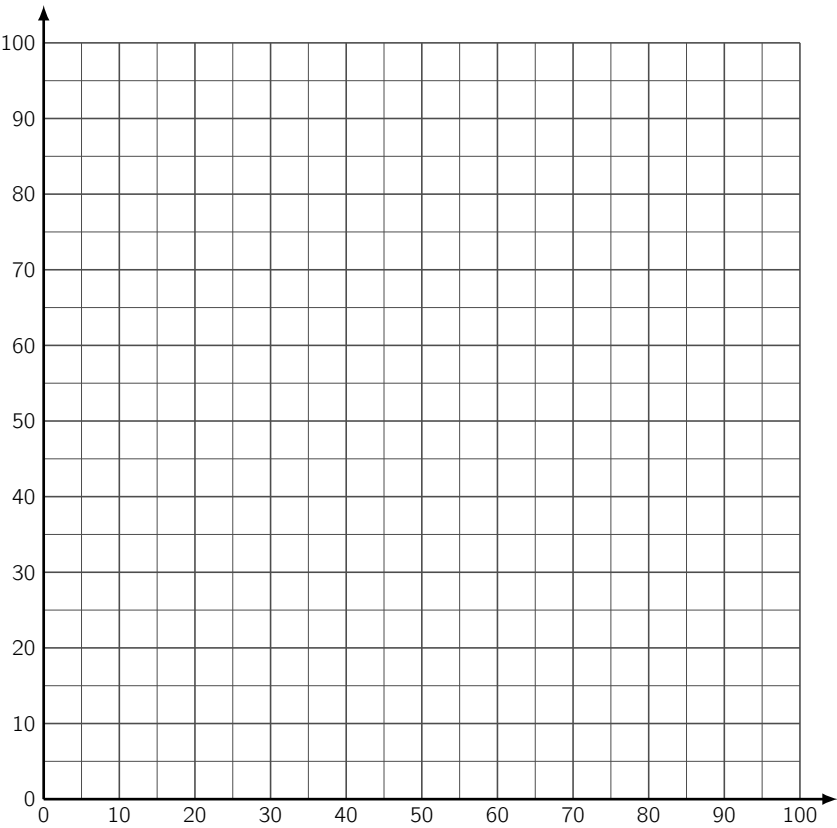
x_i	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146
y_i	185	221	114	164	125	118	193	160	151	172

Exercice 3

La résistance aux antibiotiques a un impact mondial de plus en plus important sur notre santé. Des chercheurs testent en laboratoire la résistance d'une bactérie à un nouvel antibiotique. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Quantité de médicament administrée (en cg)	12	24	32	34	47	52	56	59	72	90
Pourcentage de bactéries survivantes en fin de test	89	84	85	87	66	63	43	44	38	26

- Représenter le nuage de points :



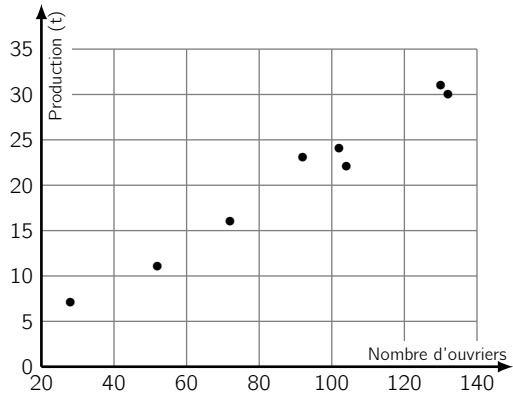
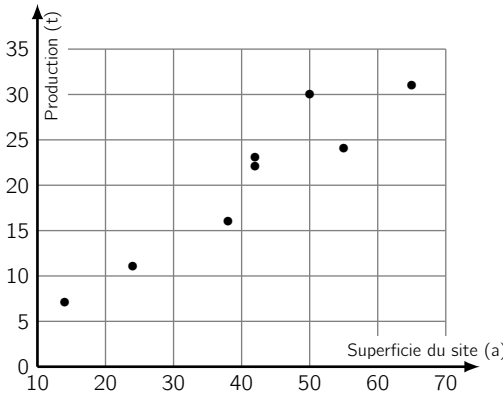
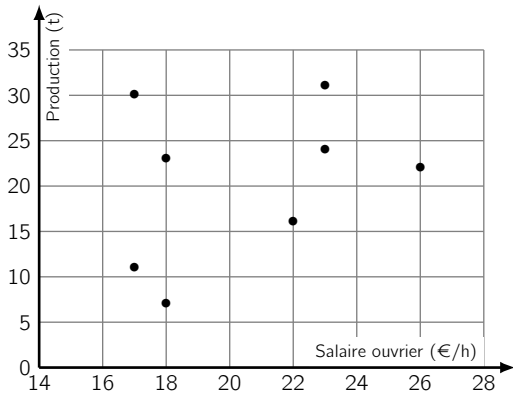
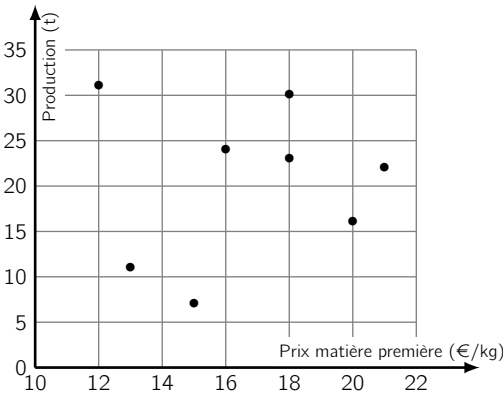
- Déterminer l'équation de la droite de Mayer puis la représenter sur le graphe ci-dessus.
- À partir de l'équation de la droite de Mayer, estimer :
 - le pourcentage de bactéries restantes avec 40 cg d'antibiotique.
 - la quantité d'antibiotique nécessaire pour tuer 75 % des bactéries.
- Selon l'expérience, quelle serait la quantité d'antibiotique à administrer pour qu'il ne reste plus aucune bactérie ?

Exercice 4

Un chef d'entreprise a réalisé une étude concernant la productivité de ses sites européens. Le tableau suivant donne les informations concernant les divers sites ainsi que quelques variables susceptibles d'influencer la production.

Sites	Liège	Paris	Bilbao	Rome	Venise	Amsterdam	Cologne	Londres
Production hebdomadaire (t)	11	31	30	22	7	23	16	24
Prix matière première (€/kg)	13	12	18	21	15	18	20	16
Salaire moyen des ouvriers (€/h)	17	23	17	26	16	18	22	23
Superficie du site (a)	24	65	50	42	14	42	38	55
Nombre d'ouvriers	52	130	32	104	28	92	72	102

- Sur base des graphiques suivants, déterminer les variables qui influencent la production des sites.



Exercice 4 (suite)

- Le chef d'entreprise a acquis un nouveau site de production de 70 ares et désire y avoir une production de 35 tonnes. Est-ce faisable selon les données statistiques ? Justifier.
- À l'aide de l'équation de la droite de Mayer, estimer le nombre d'ouvriers que le chef d'entreprise doit employer sur le nouveau site.
- Serait-il judicieux d'utiliser les données statistiques pour estimer la production d'un site de plus de 200 ares ? Justifier.

UAA 1

Approche graphique d'une fonction

1.1 Qu'est-ce qu'un graphe ?

Dans de nombreux domaines, scientifiques ou non, la représentation graphique de données est importante, même s'il faut parfois s'en méfier. Elle permet la visualisation d'informations. Celles-ci peuvent être sous la forme de données collectées (comme l'évolution de la température de jour en jour) ou d'une fonction.

Le plus souvent, ces graphiques sont réalisés dans un système d'axes perpendiculaires et possèdent parfois des unités de longueur identiques sur chaque axe. Dans le cas où le graphe possède à la fois des axes perpendiculaires et des unités de longueur identiques sur chacun d'eux, on dit que les axes sont orthonormés. Il est parfois avantageux d'utiliser un tel système d'axes dans le cas, par exemple, de la détermination de mesures d'angles ou de longueurs.

Un graphe est donc la représentation de données. Celles-ci peuvent être issues d'une formule, de valeurs recueillies lors d'un process industriel ou encore lors d'un sondage.

Par convention, on place la variable indépendante sur l'axe horizontal des x (axe des abscisses) et la variable dépendante sur l'axe vertical des y (axe des ordonnées).

1.2 Que doit contenir un graphe ?

Pour réaliser un graphique, il faut :

- * Un plan ;
- * Des axes linéaires, perpendiculaires, orientés, (généralement) normés et nommés ;
- * Une origine, une échelle sur chaque axe et des points à placer sur le plan.

Chaque point possède des coordonnées notées dans l'ordre chronologique : $(x; y)$, x étant l'abscisse du point et y étant son ordonnée.

Les coordonnées x et y peuvent prendre des valeurs positives, nulles ou négatives.

Les coordonnées de l'origine du repère sont $(0; 0)$, ce qui signifie que tous les points de l'axe x ont une ordonnée nulle et que tous les points de l'axe y ont une abscisse nulle.

Si l'on a une fonction, par exemple $f(x) = -2x + 5$, x représente la variable indépendante. Dans ce cas, on doit déterminer les points à placer sur le graphique en calculant la coordonnée y d'une série de points au départ de l'équation $y = -2x + 5$. Une fois les points déterminés, on les place sur le graphique.

Si l'on relie tous ces points entre eux, on obtient la représentation graphique de la fonction.

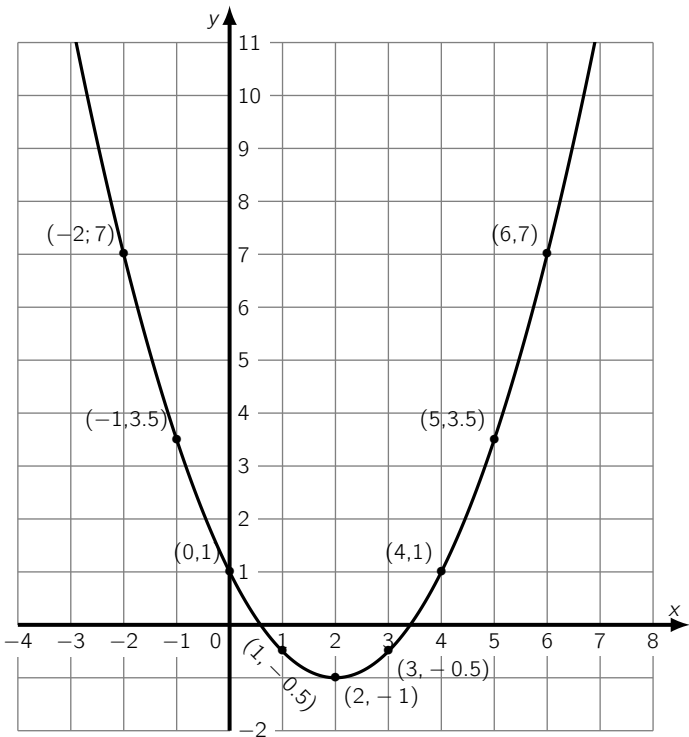
1.3 Prenons un exemple

Partons de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Nous allons choisir, nous-mêmes, différentes valeurs pour x et en calculer ensuite les valeurs de $f(x)$, c'est-à-dire y . Réalisons un tableau de valeurs.

x	$f(x)$ ou y	Point
-2	$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 + 1 = 7$	$\rightarrow (-2;7)$
-1	$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 + 1 = 3,5$	$\rightarrow (-1;3,5)$
0	$f(0) = \frac{1}{2} \cdot (0)^2 - 2 \cdot (0) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 + 1 = 1$	$\rightarrow (0;1)$
1	$f(1) = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 - 2 \cdot (1) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 + 1 = -0,5$	$\rightarrow (1;-0,5)$
2	$f(2) = \frac{1}{2} \cdot (2)^2 - 2 \cdot (2) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 + 1 = -1$	$\rightarrow (2;-1)$
3	$f(3) = \frac{1}{2} \cdot (3)^2 - 2 \cdot (3) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 9 - 6 + 1 = -0,5$	$\rightarrow (3;-0,5)$
4	$f(4) = \frac{1}{2} \cdot (4)^2 - 2 \cdot (4) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 8 + 1 = 1$	$\rightarrow (4;1)$
5	$f(5) = \frac{1}{2} \cdot (5)^2 - 2 \cdot (5) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 25 - 10 + 1 = 3,5$	$\rightarrow (5;3,5)$
6	$f(6) = \frac{1}{2} \cdot (6)^2 - 2 \cdot (6) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 36 - 12 + 1 = 7$	$\rightarrow (6;7)$

Maintenant que l'on a nos points, plaçons-les sur le graphique et relier-les. Nous obtenons ainsi la représentation graphique de la fonction.



2.1 Activité – Panneau publicitaire

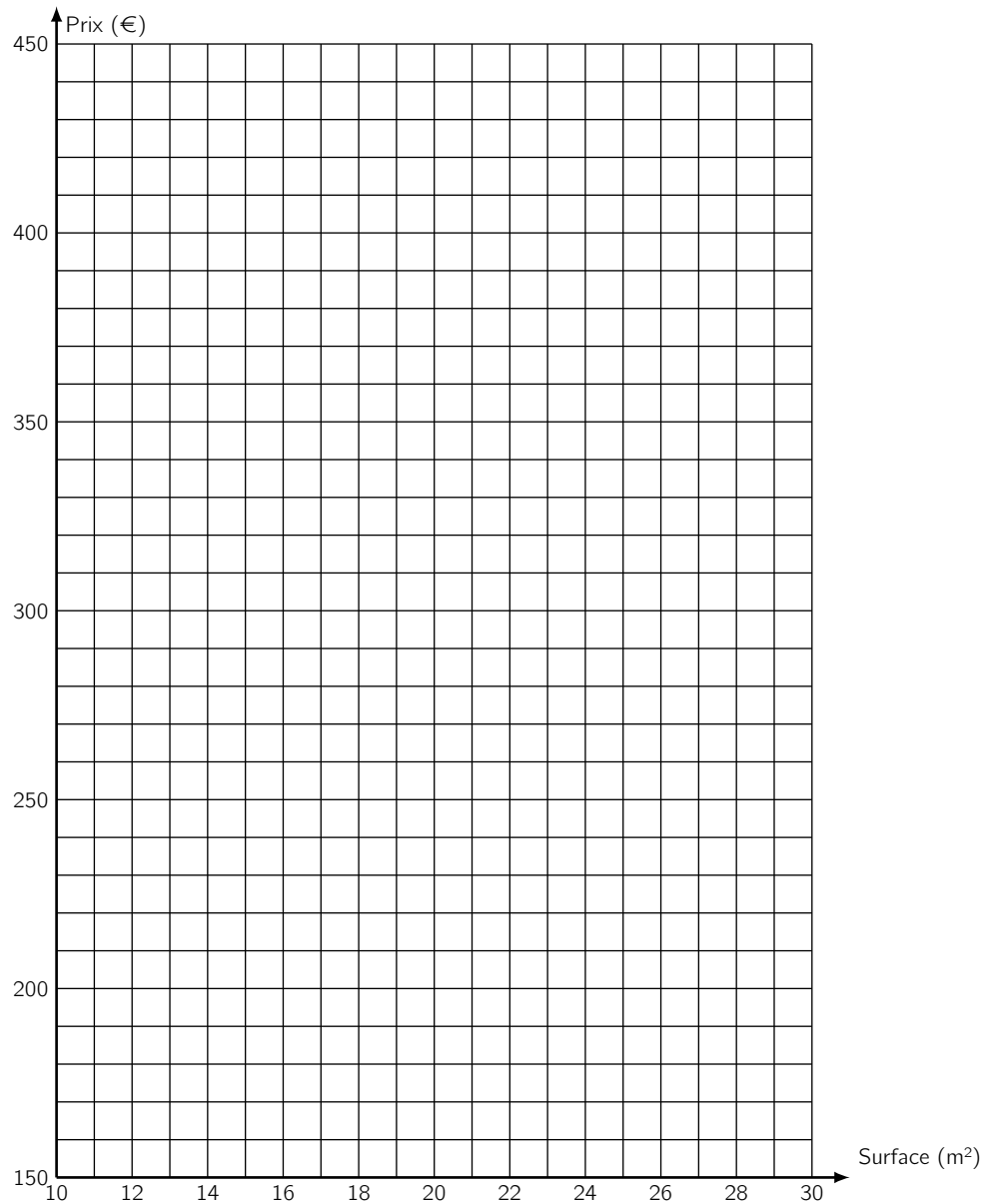
Le tableau ci-dessous donne les prix payés TTC, selon leur superficie, pour des panneaux publicitaires pour lesquelles s'applique un même plan tarifaire.

Surface (m ²)	Prix (€)
22	330
14	210
16	240
12	180
24	360
11	165

Avec ce même plan tarifaire, Olivier a commandé un panneau publicitaire rectangulaire de 6 m par 3 m.

À l'aide de points, on demande de représenter les données du tableau dans le repère cartésien ci-dessous sur lequel les abscisse et ordonnée représentent respectivement la surface du panneau publicitaire et son prix.

Tracer ensuite la droite reliant tous les points.



En se basant sur le graphe, déterminer le prix qu'Olivier paiera son panneau publicitaire.

On dit que le prix **est fonction de** la surface.

Si l'on appelle cette fonction f , on écrira $f(16) = 240$ pour spécifier qu'une surface de 16 m^2 coûte 240 € .

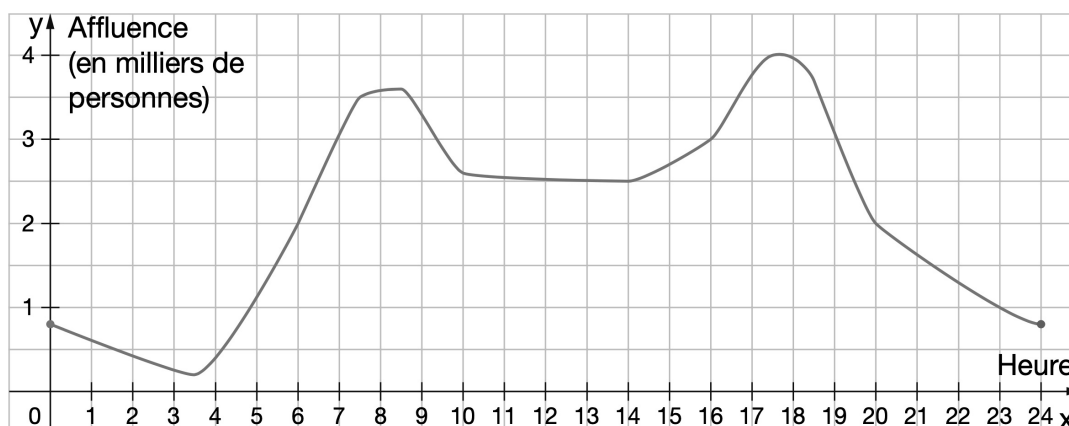
Compléter les égalités suivantes :

$$f(14) = \dots \quad f(19) = \dots \quad f(23) = \dots \quad f(27) = \dots$$

2.2 Activité – Portail électronique

Les portails électroniques situés à l'entrée des stations de métro permettent à la société de transport en commun de connaître la fréquentation de l'ensemble des stations à chaque instant.

Le graphique ci-dessous indique la fréquentation au cours d'une journée. L'axe des y représente l'affluence en milliers de personnes et l'axe des x représente les heures d'affluence.



Le graphique est-il celui d'une fonction ? Justifier.

La variable qui dépend de l'autre est appelée **variable dépendante**, l'autre étant la **variable indépendante**.

Compléter :

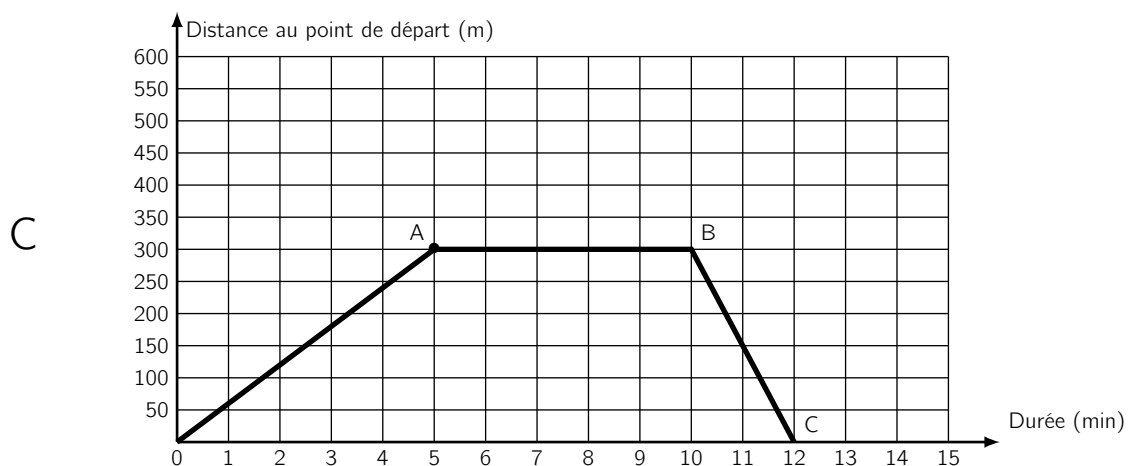
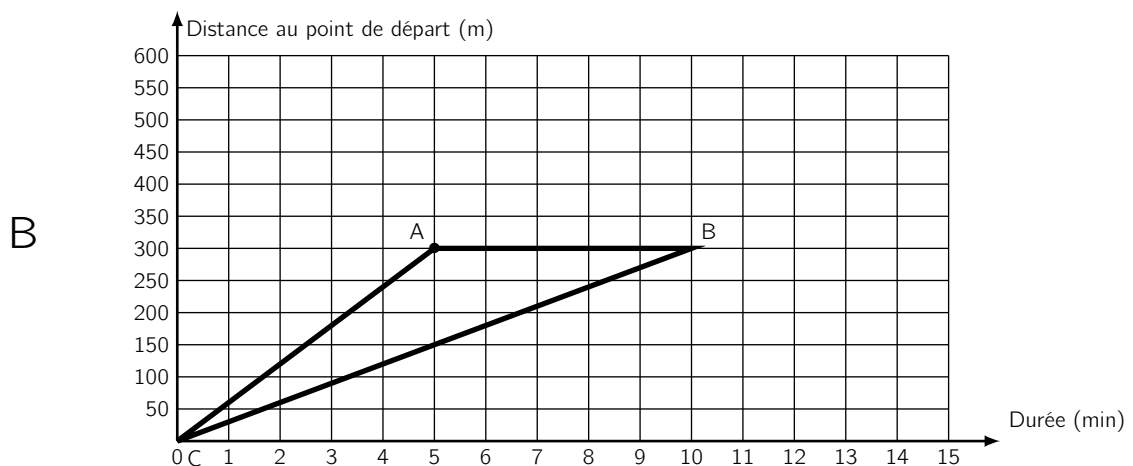
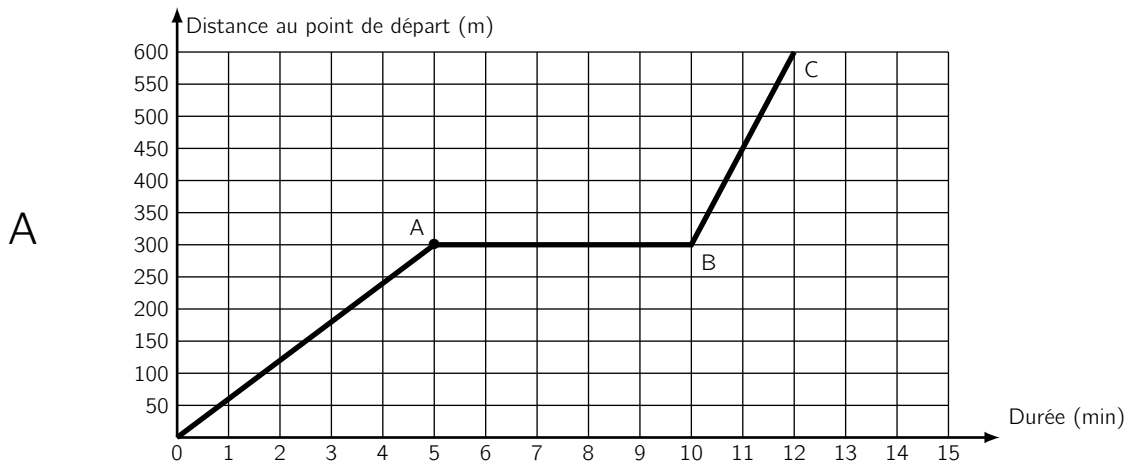
- * Dans cette activité, la variable indépendante est :
- * et la variable dépendante est :

Si l'on appelle f la fonction représentée, déterminer $f(16)$ puis exprimer, à l'aide d'une phrase, ce que représente la valeur dans le contexte présenté.

2.3 Activité – Aller-retour

Les élèves Amandine et Tom pensent devoir changer de bâtiment durant la récréation. Ils partent donc du bâtiment 3A et marchent jusqu'au bâtiment 6. Là, ils attendent 5 minutes et sont étonnés de ne voir personne. Se souvenant d'un changement d'horaire, ils retournent en courant jusqu'au bâtiment 3A pour ne pas arriver en retard au cours.

a) Parmi les graphiques ci-dessous, lequel correspond à ce récit ?

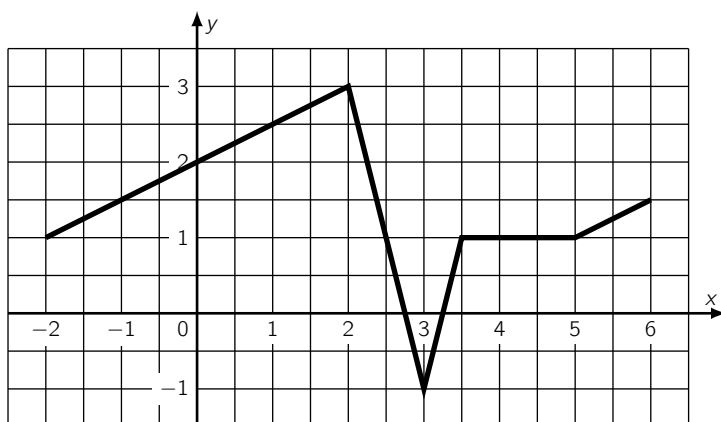


- b) Quelle est l'ordonnée du point A ?
- c) Quelles sont les coordonnées des autres points remarquables ? (Les identifier sur le bon graphique)
- d) Évaluer la vitesse moyenne en course (en km/h) d'Amandine et de Tom.

2.4 Exercices

Exercice 1

Compléter les informations relatives au graphique.



$$f(6) = \dots$$

$$f(\dots) = 0$$

$$f(-1) = \dots$$

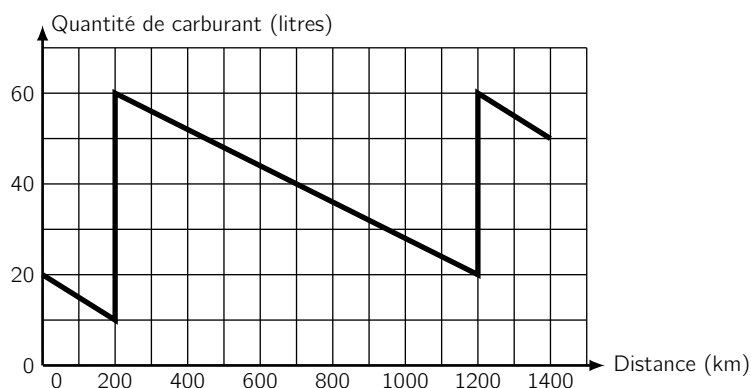
$$f(3) = \dots$$

$$f(\dots) = 3$$

$$f(\dots) = -1$$

Exercice 2

Le graphique suivant montre l'évolution du niveau de carburant dans le réservoir d'une voiture au cours d'un départ en vacances.



1. Combien de litres de carburant y a-t-il dans le réservoir au début du voyage ?
2. Quelle est la longueur du voyage (en km) ?
3. Combien de fois a-t-on refait le plein ?
4. Quelle est la capacité du réservoir si l'on a fait le plein à chaque fois ?
5. Au cours du voyage, après combien de kilomètres la jauge du réservoir affiche-t-elle $\frac{1}{4}$?

Exercice 3

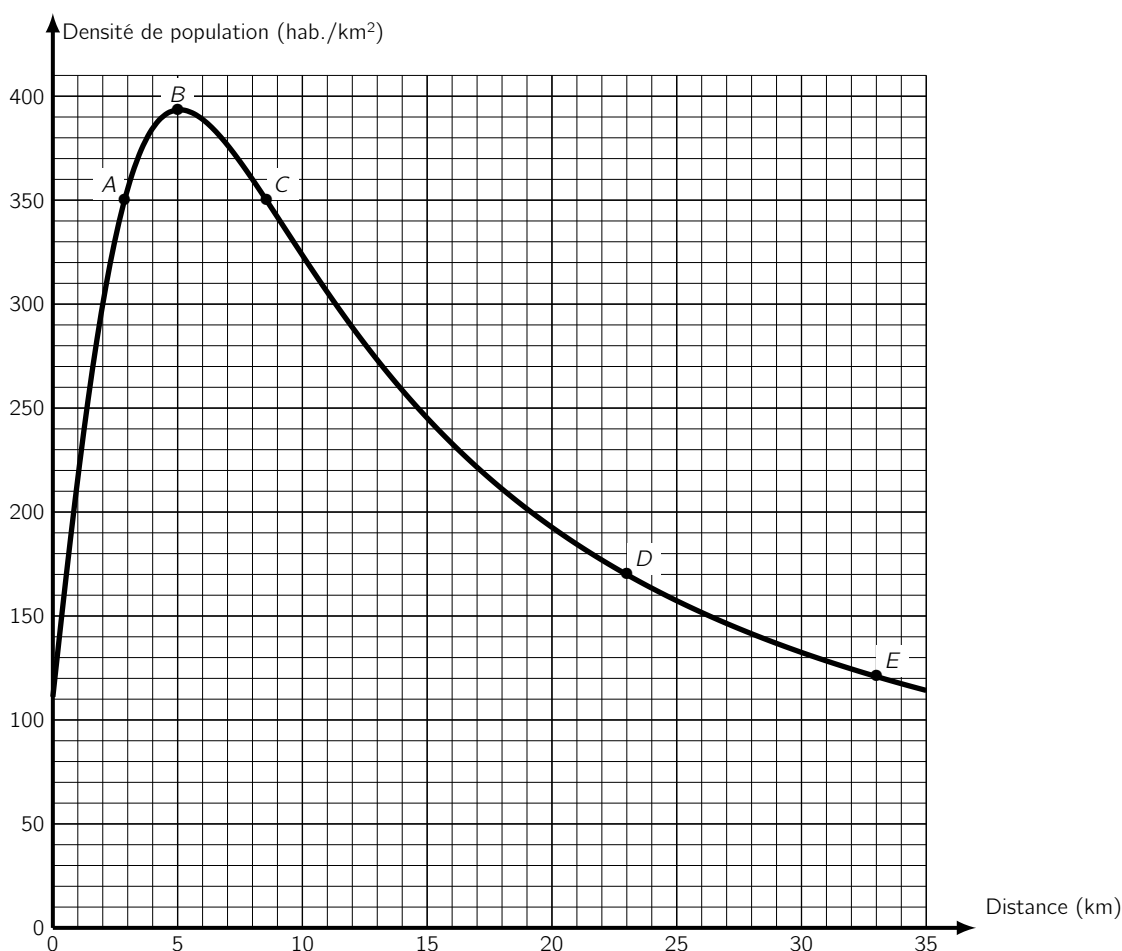
Exercice sur deux pages !

La densité de population exprime le nombre de personnes par unité de surface. En général, elle est exprimée en nombre d'habitants par kilomètre carré. On l'obtient en divisant le nombre d'habitants sur une surface déterminée par sa superficie (en km^2).

En Belgique, la densité de population moyenne ^a est de 375,4 hab./ km^2 .

À titre de comparaison, dans la région de Bruxelles Capitale, cette densité atteint 7 511 hab./ km^2 .

Le graphique suivant représente la densité de population d'une ville en fonction de la distance, en kilomètres, au centre-ville (il s'agit d'une petite ville de Wallonie).



a. Les diverses valeurs de densité de population de cet exercice sont extraites du site www.iweeps.be/indicateur-statistique/densite-de-population/ (consulté le 6/4/2022).

1. D'après le graphique, à quelle distance du centre-ville la densité de population est-elle la plus élevée ?
2. On voit que les points A et C ont même ordonnée. Comment interpréter cela dans le contexte ?
3. Quelle est la différence de densité de population entre les lieux qui correspondent au point D et au point E du graphique ?
4. Le graphique qui modélise la densité de population en fonction de la distance au centre-ville correspond au graphique de la fonction dont l'expression analytique est :

$$D(x) = \frac{4000 \cdot (x + 1)}{x^2 + 36}$$

Utiliser cette formule pour calculer

* $D(2) = \dots$

* $D(5) = \dots$

* $D(10) = \dots$

5. Décrire l'évolution de la densité de population en fonction de la distance au centre-ville.

Domaine et ensemble image d'une fonction

3.1 Activité – Logo

Un club de basket a commandé un logo devant respecter les conditions suivantes :

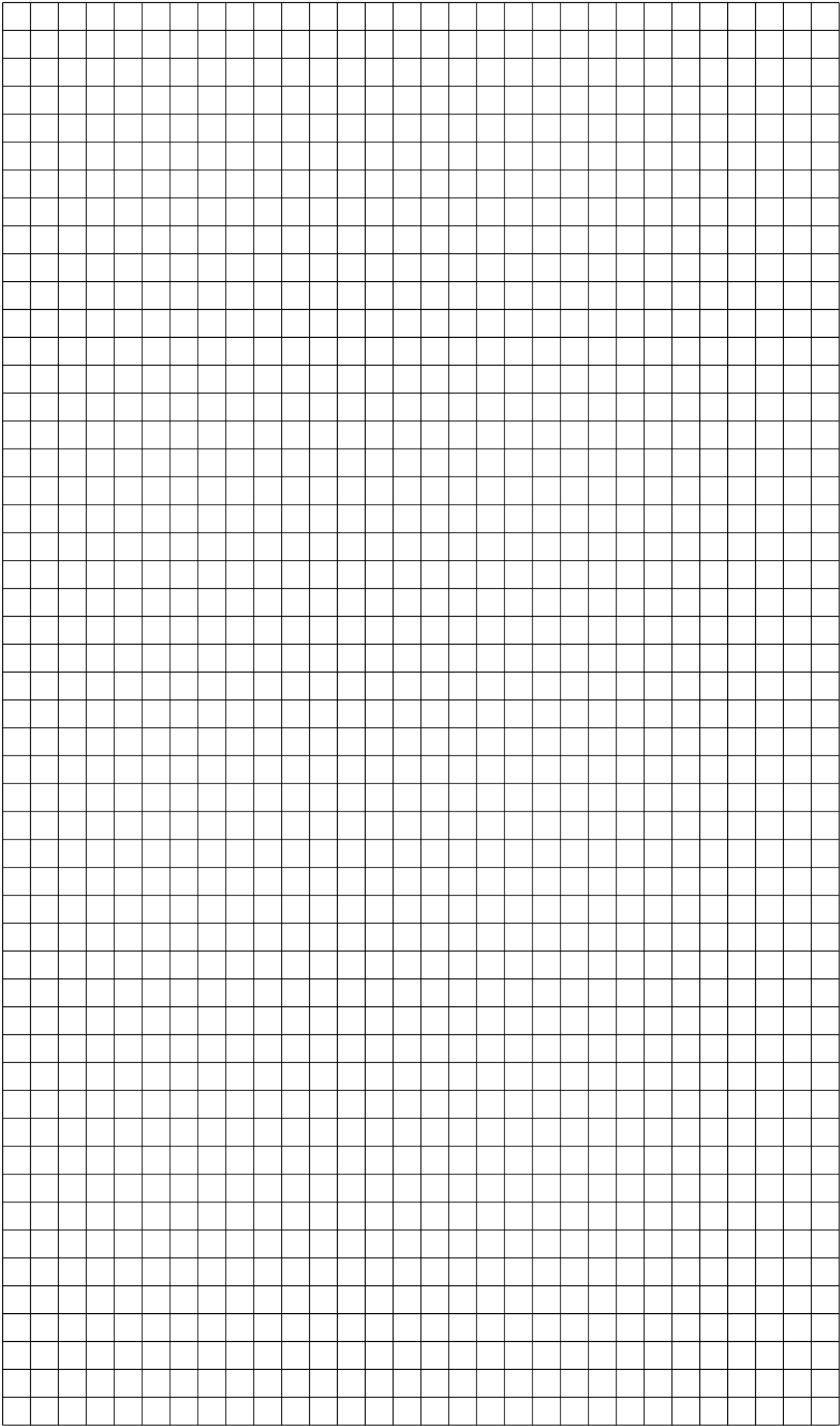
- être de forme rectangulaire ;
- avoir un rapport longueur sur largeur égal à $5/4$;
- contenir l'image d'un ballon de basket de minimum 4 cm de diamètre ;
- pouvoir être construit sur une feuille A4 disposée en mode paysage (21 cm sur 29,7 cm).

a) En respectant les conditions demandées ci-avant, représenter, sur la page suivante, un premier logo de 8 cm de large puis un second de 6 cm de large.

Ensuite, déterminer les dimensions du plus petit et du plus grand logo réalisables.

* Dimensions du plus petit logo :

* Dimensions du plus grand logo :



- b) On nomme f_1 la fonction qui exprime la longueur du logo par rapport à sa largeur.
Construire un tableau de valeurs de la fonction f_1 contenant quelques largeurs possibles x , classées par ordre croissant, et les longueurs correspondantes y , en prenant soin d'y inclure les dimensions minimales et maximales du logo (déterminées p.71).

x	
y	

Si le **domaine d'une fonction** est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable indépendante x , donner le domaine de la fonction f_1 en notant cet ensemble **Dom** f_1 .

Si l'**ensemble image d'une fonction** est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante y , donner l'ensemble image de la fonction f_1 en notant cet ensemble **Im** f_1 .

- c) On nomme f_2 la fonction qui exprime l'aire du logo par rapport à sa largeur.
Construire un tableau de valeurs de la fonction f_2 contenant quelques largeurs possibles x , classées par ordre croissant, et les aires correspondantes y .

x	
y	

Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction f_2 .

d) Lorsque le logo est dessiné sur une feuille de papier, la surface de la feuille située à l'extérieur du logo est perdue. On nomme f_3 la fonction qui exprime l'aire de la surface perdue d'une feuille A4 par rapport à la largeur du logo.

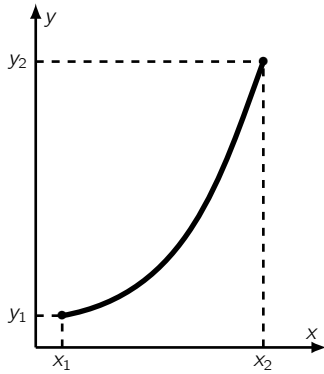
Construire un tableau de valeurs de la fonction f_3 contenant quelques largeurs possibles x , classées par ordre croissant, et les aires des surfaces perdues correspondantes y .

x	
y	

Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction f_3 .

e) Associe chacune des fonctions f_1 , f_2 et f_3 à son graphique. Pour chaque graphique, précise les bornes du domaine (x_1 et x_2) et celles de l'ensemble image (y_1 et y_2).

Fonction : ...



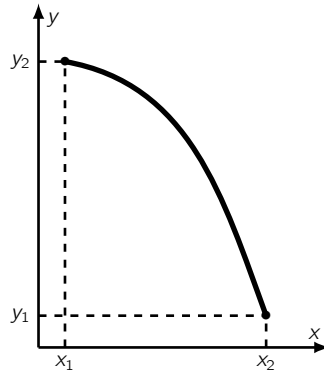
$x_1 = \dots$

$x_2 = \dots$

$y_1 = \dots$

$y_2 = \dots$

Fonction : ...



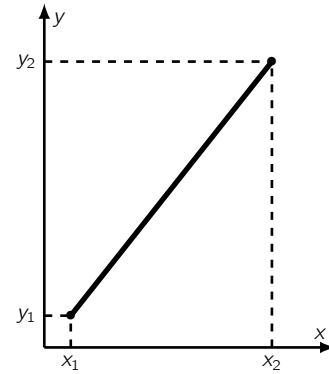
$x_1 = \dots$

$x_2 = \dots$

$y_1 = \dots$

$y_2 = \dots$

Fonction : ...



$x_1 = \dots$

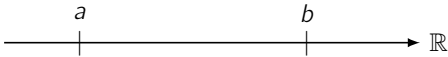
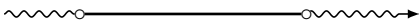
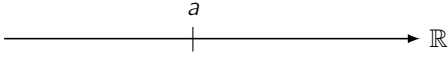
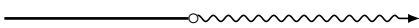
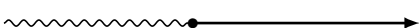
$x_2 = \dots$

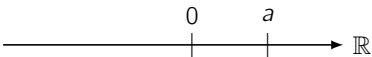
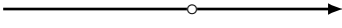
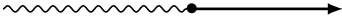
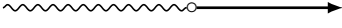
$y_1 = \dots$

$y_2 = \dots$

3.1.1 Les parties de $\mathbb{R}$

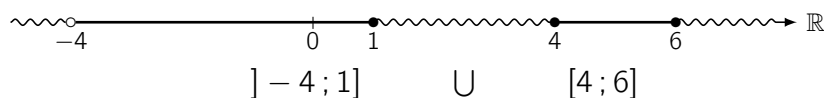
L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté sur une droite graduée. En utilisant ce procédé, il est facile de noter des parties de cet ensemble.

Notation	Représentation
	
$]a; b[$	
$[a; b]$	
$]a; b]$	
$[a; b[$	
	
$] - \infty ; a]$ ou $\leftarrow ; a]$	
$] - \infty ; a[$ ou $\leftarrow ; a[$	
$[a; +\infty[$ ou $[a; \rightarrow$	
$]a; +\infty[$ ou $]a; \rightarrow$	

Ensemble des réels...	Notation	Représentation
		
... différents de a	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	
... non nuls	$\mathbb{R}_0$	
... positifs	$\mathbb{R}^+$	
... strictement positifs	$\mathbb{R}_0^+$	
... négatifs	$\mathbb{R}^-$	
... strictement négatifs	$\mathbb{R}_0^-$	

Remarque : Lorsqu'un ensemble est constitué de deux sous-ensembles, on utilise le symbole $\cup$ (union) pour indiquer l'ensemble des éléments appartenant à l'un ou l'autre de ces sous-ensembles.

Exemple :

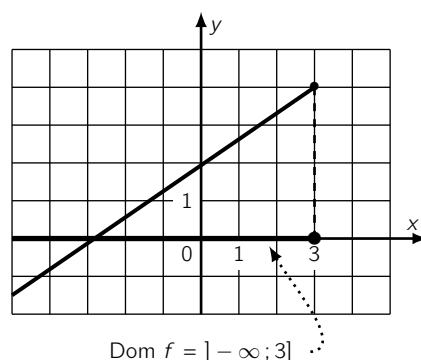
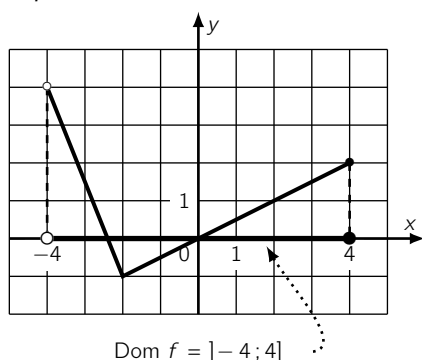


3.1.2 Domaine d'une fonction

Le domaine d'une fonction (notion déjà vue p.73) est l'ensemble des valeurs acceptées par cette fonction. On peut aussi dire que c'est l'ensemble des réels ayant une image par cette fonction.

Le domaine d'une fonction se lit donc sur l'axe des x .

Exemples :

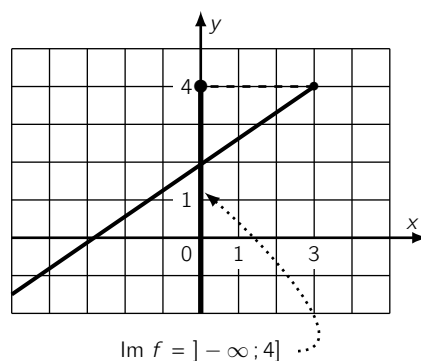
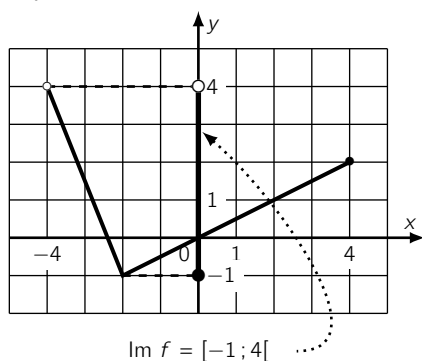


3.1.3 Ensemble image d'une fonction

L'ensemble image d'une fonction (notion déjà vue p.73) est l'ensemble des réels images par cette fonction.

L'ensemble image se lit donc sur l'axe des y .

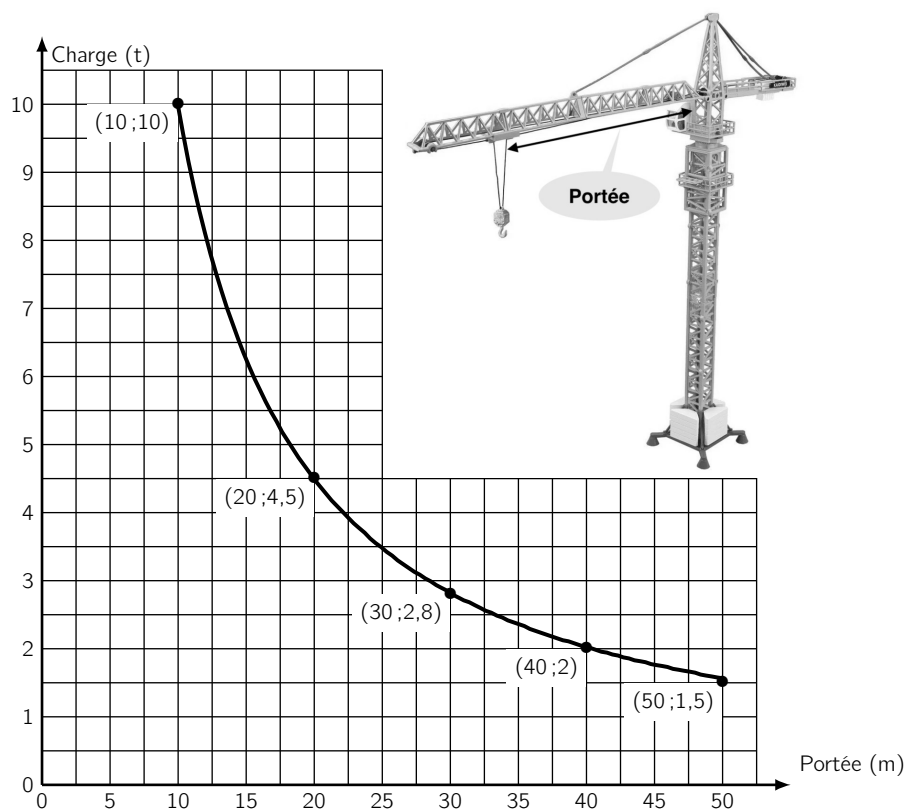
Exemples :



3.2 Activité – Grue de chantier

La charge maximale d'une grue de chantier est fonction de la portée.

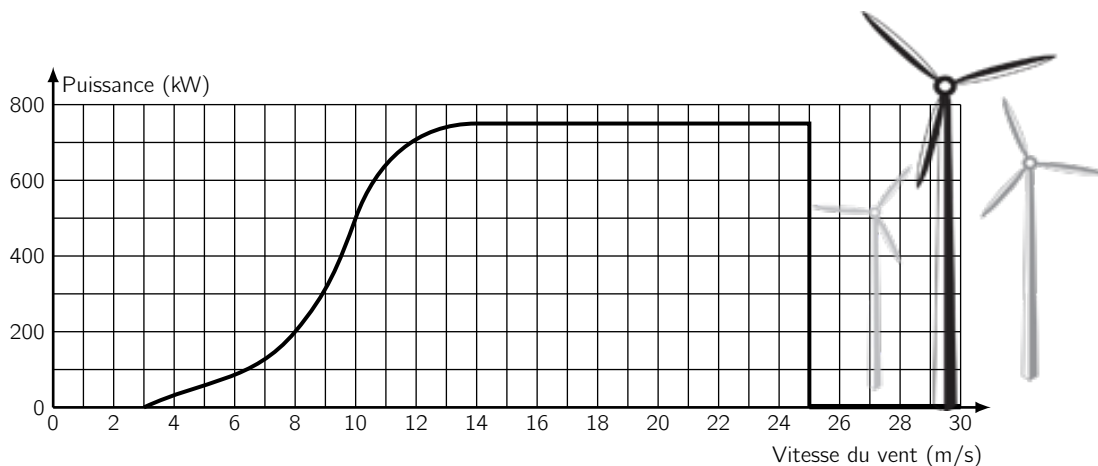
Le graphique ci-dessous fournit au grutier les renseignements concernant les charges maximales correspondant aux longueurs de la portée de sa grue. Les longueurs (en mètres) sont indiquées sur l'axe des abscisses et les charges (en tonnes) sont indiquées sur l'axe des ordonnées.



1. Quel est le domaine de cette fonction ?
2. Quel est l'ensemble image de cette fonction ?
3. Quelle est la charge maximale pour une portée de 30 m ?
4. Quelle est la portée maximale pour une charge de 7,75 tonnes ?

3.3 Activité – Éolienne

Le graphique ci-dessous donne la puissance (en kW) délivrée par une éolienne selon la vitesse du vent.

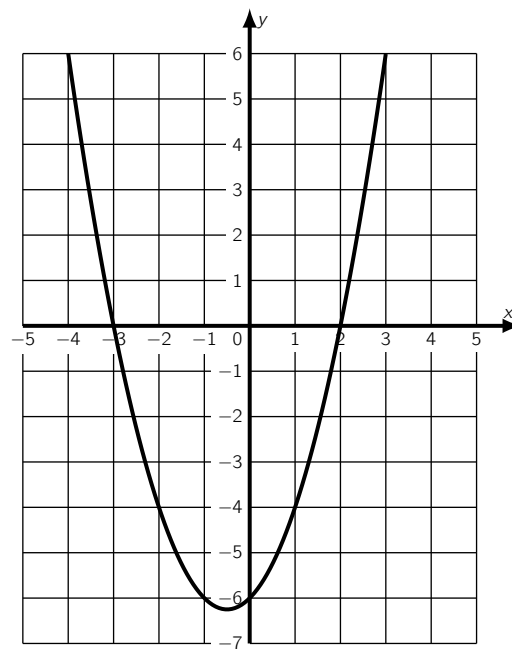


1. À partir de quelle vitesse de vent (en m/s) cette éolienne produit-elle de l'électricité ?
2. Quelle puissance délivre cette éolienne avec un vent de 8 m/s ?
3. Cette éolienne a une puissance nominale (c'est-à-dire maximale) de 750 kW. Pour quelles vitesses de vent est-elle atteinte ?
4. À partir de quelle vitesse de vent (en m/s) arrête-t-on cette éolienne ?
5. Pour quelles vitesses de vent (en m/s) l'éolienne délivre-t-elle une puissance supérieure à 500 kW ?
6. En s'appuyant sur le cas d'un vent de 25 m/s, expliquer pourquoi ce graphe ne représente pas une fonction.

Intersections de la fonction avec les axes

4.1 Activité – Fonction & intersections

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 + x - 6$.



Nous constatons que cette fonction coupe l'axe des x en deux points.

Quelles sont les coordonnées des points d'intersection entre la fonction et l'axe des abscisses ?

Les **racines** de la fonction sont les abscisses des points d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des x .

Les racines de la fonction $f(x) = x^2 + x - 6$ sont donc : et

La fonction coupe aussi l'axe des y en un point.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection entre la fonction et l'axe des ordonnées ?

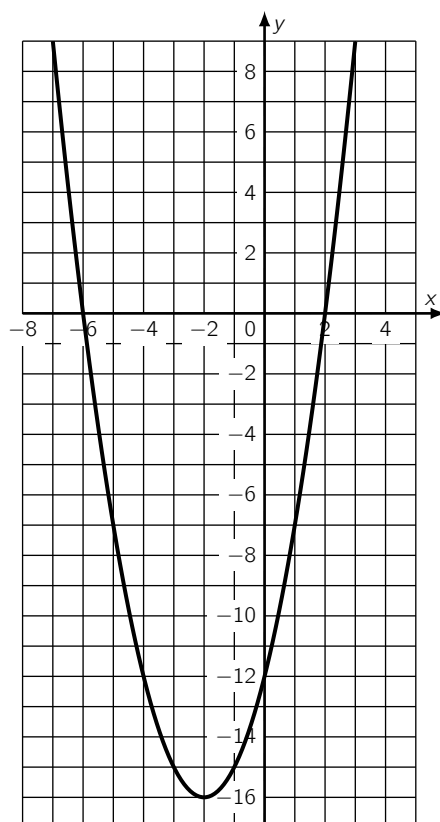
L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe des y .

L'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x) = x^2 + x - 6$ est donc :

4.2 Exercices

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente une fonction.



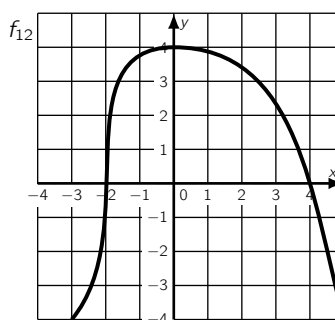
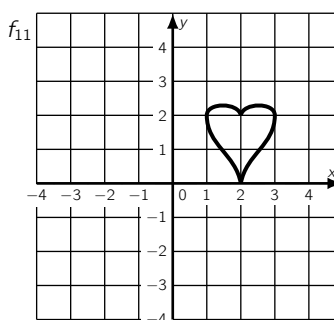
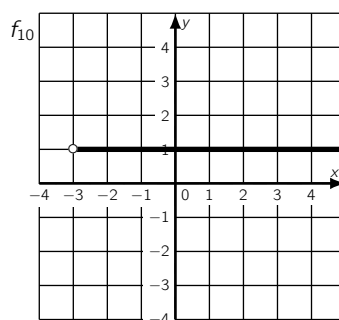
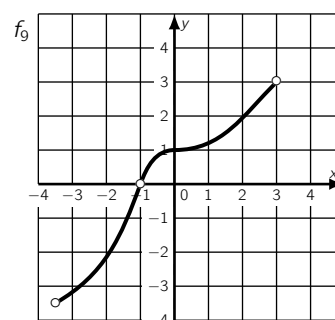
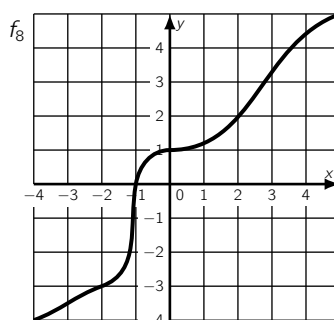
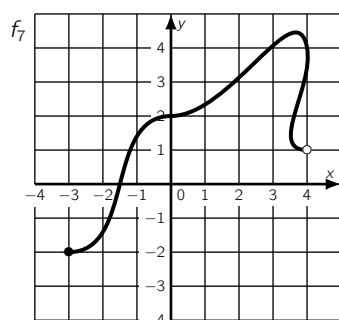
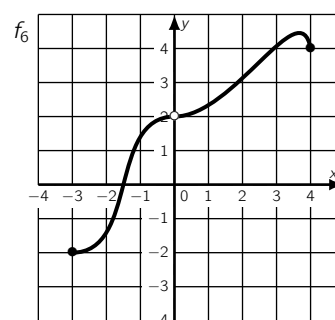
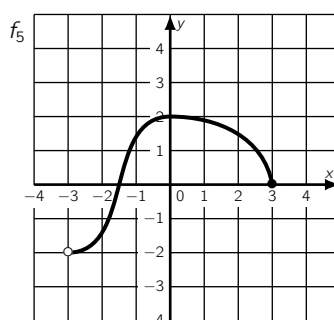
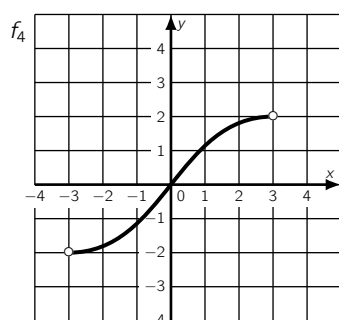
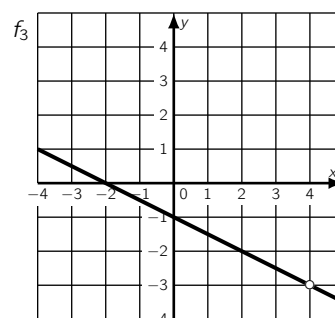
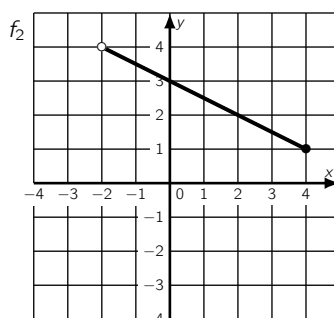
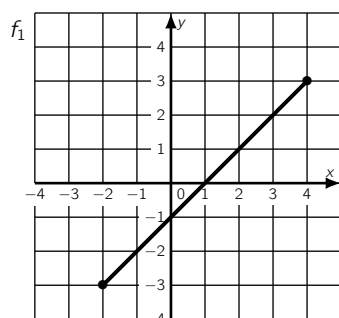
1. Quel est le domaine de la fonction ?
2. Quel est l'ensemble image de la fonction ?
3. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la fonction avec l'axe des x ?
4. Quelles sont les racines de la fonction ?
5. Que vaut l'ordonnée à l'origine de la fonction ?

Exercice 2

Exercice sur deux pages !

Voici une douzaine de graphes.

Compléter, si c'est possible, pour chacune des fonctions, le tableau de la page suivante en y indiquant le domaine, l'ensemble image, la (ou les) racine(s) et l'ordonnée à l'origine de chaque graphe.

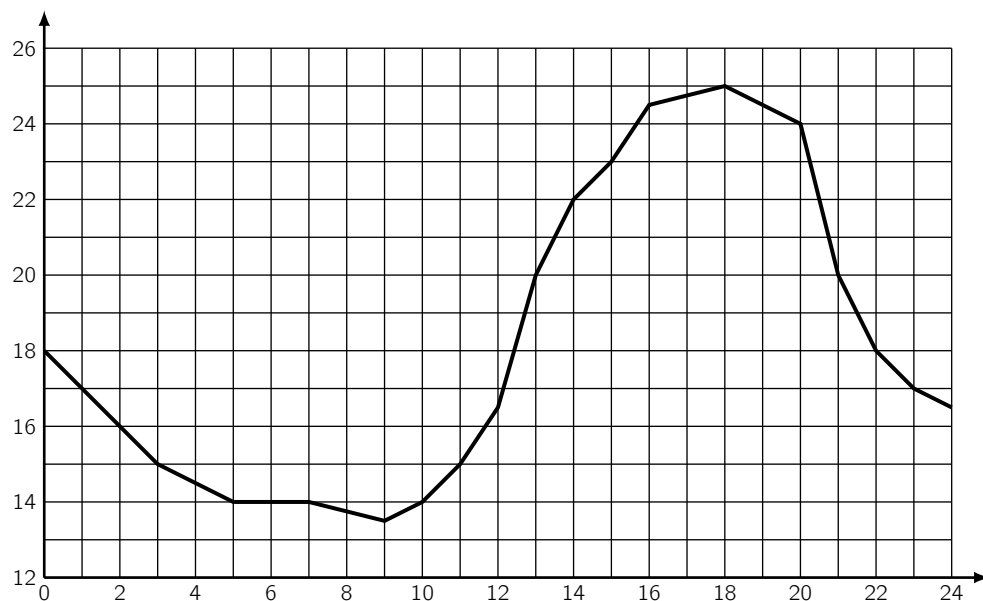


Compléter le tableau.

	Domaine de la fonction	Ensemble image de la fonction	Racine(s)	Ordonnée à l'origine
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				
f_5				
f_6				
f_7				
f_8				
f_9				
f_{10}				
f_{11}				
f_{12}				

5.1 Activité – Évolution de températures (1)

Le graphe ci-dessous représente l'évolution des températures relevées, au demi degré près, dans une station météorologique. On note T la fonction qui lie la température du lieu à l'heure de son relevé.



1. Ce graphe est incomplet : quelle légende doit-on écrire sur chacun des axes ?

* Axe des abscisses (x) :

* Axe des ordonnées (y) :

2. Les questions suivantes signifient la même chose :

- « *Quelle température faisait-il à 10 heures ?* »
- « *Que vaut $T(10)$?* »
- « *Quelle est l'**image** de 10 par la fonction T ?* »

Quelle est la réponse à ces questions ?

3. Les questions suivantes signifient la même chose :

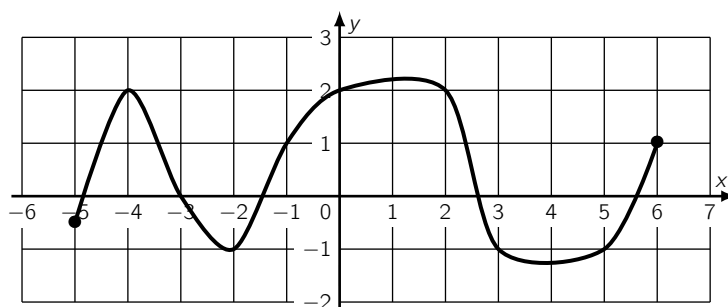
- « *À quelles heures la température était-elle de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$?* »
- « *Quels sont les **antécédents** de 20 pour la fonction T ?* »

Quelles sont les réponses à ces questions ?

5.2 Exercices

Exercice 1

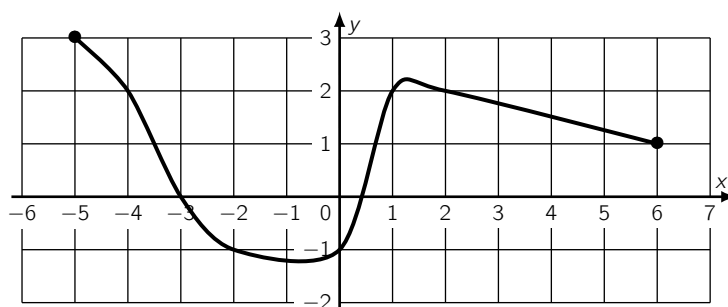
Le graphe ci-dessous représente une fonction.



1. Que valent les images de -4 , de 2 et de 5 ?
2. Quels sont les antécédents de -1 et de 2 ?

Exercice 2

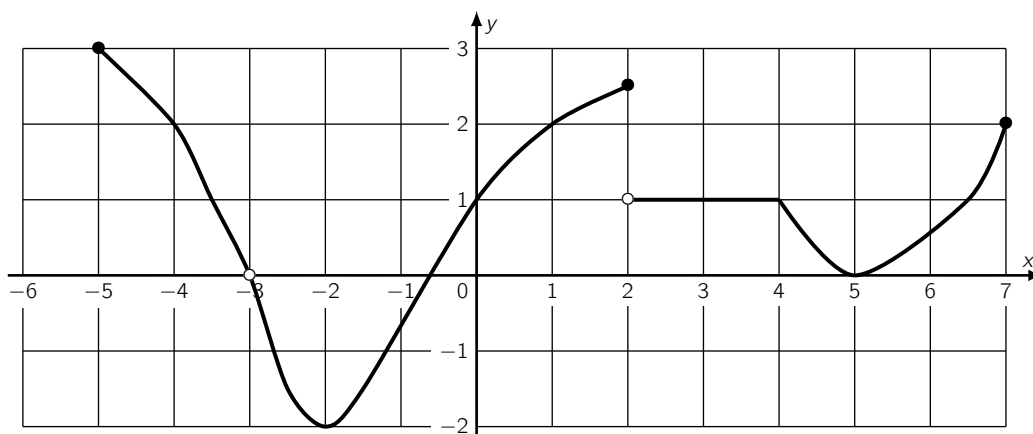
Le graphe ci-dessous représente une fonction.



1. Que valent les images de -5 , de -2 et de 1 ?
2. Quels sont les antécédents de -1 et de 2 ?

Exercice 3

Le graphe ci-dessous représente une fonction.



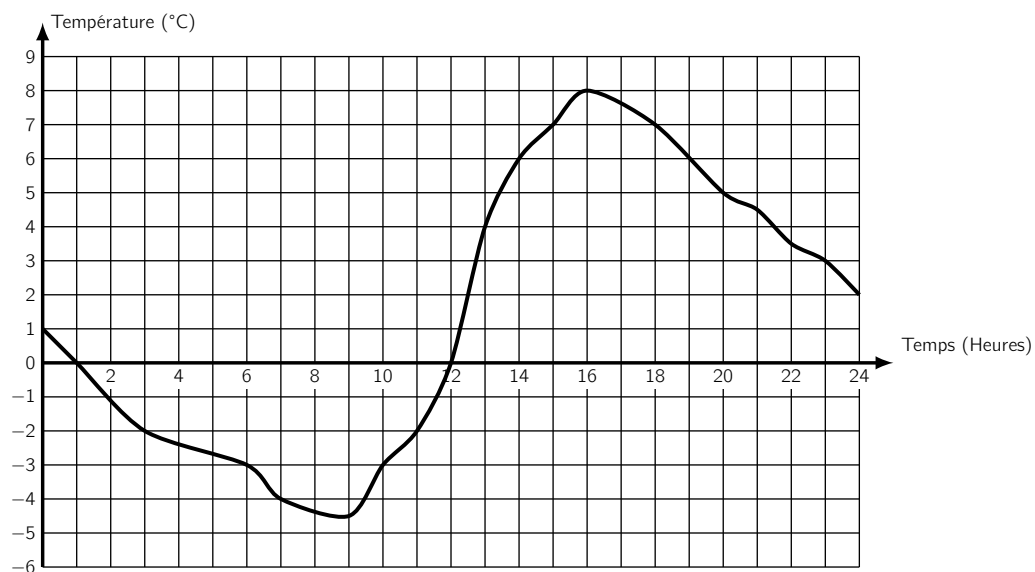
- Déterminer le domaine, l'ensemble image, les racines et l'ordonnée à l'origine de la fonction.
- Que valent les images de 2, de 3 et de -5 ?
- Quels sont les antécédents de -2 , de 2 et de $-1,5$?
- Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$f(x) \leq 0 \quad \rightarrow x \in \dots$$

$$-2 \leq f(x) \leq -1,5 \quad \rightarrow x \in \dots$$

6.1 Activité – Évolution de températures (2)

Représentation de l'évolution des températures relevées, au demi degré près, dans une station météorologique des Alpes, durant une journée. On note T la fonction qui lie la température du lieu à l'heure de son relevé.



1. Quelle est la période couverte par les observations ? (à écrire sous forme d'intervalle)
2. Quelle est l'amplitude thermique de la journée ? (à écrire sous forme d'intervalle)
3. À quel(s) moment(s) de la journée la température était-elle nulle ?

Nous allons maintenant présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

Dans ce tableau, nous allons repérer s'il gèle ou non et à quel moment s'effectue le changement (passage à 0°C).

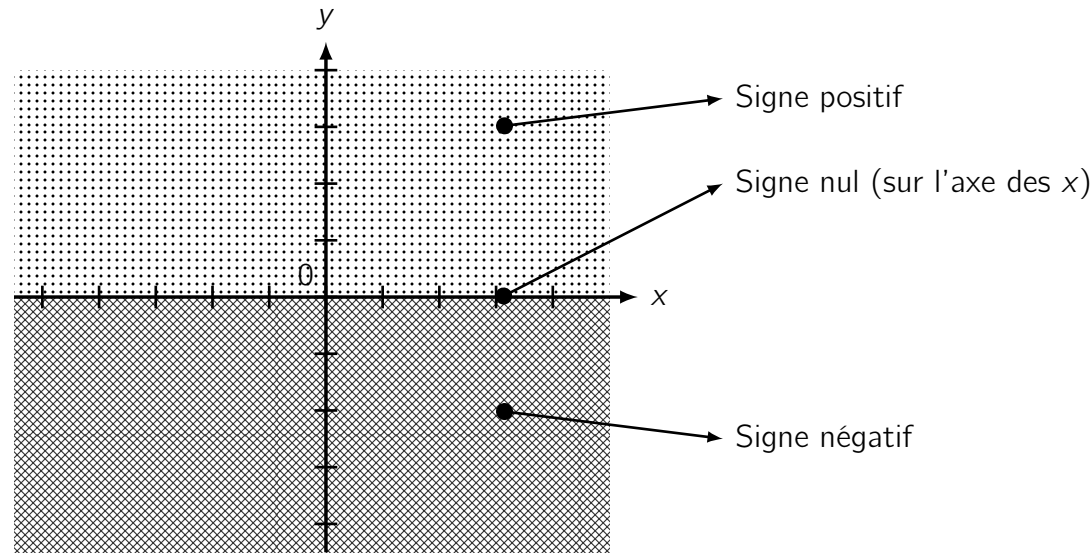
La courbe de température étant une fonction, on peut identifier chaque passage à 0°C comme une _____ de la fonction.

Nous indiquerons par un **signe « - »** lorsque la température est négative, par « 0 » lorsqu'elle est nulle et par un **signe « + »** lorsqu'elle est positive.

Ce tableau est appelé _____ de la fonction.

Heure	
Signe de la température	

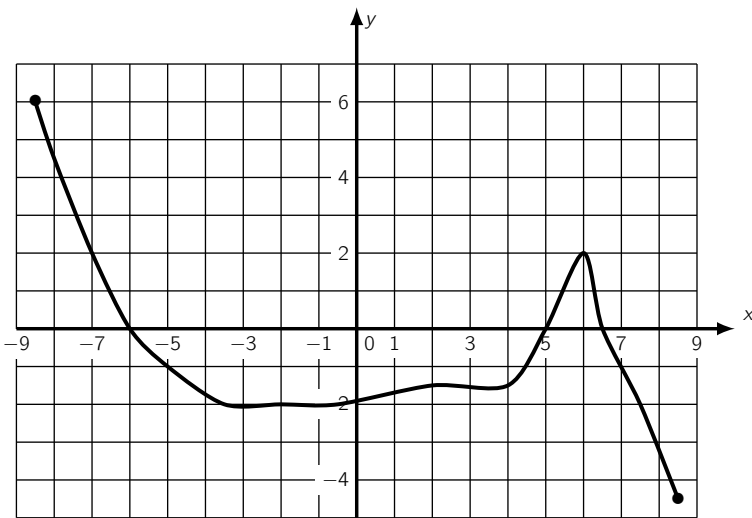
6.1.1 Le signe d'une fonction, en résumé



6.2 Exercices

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente une fonction.

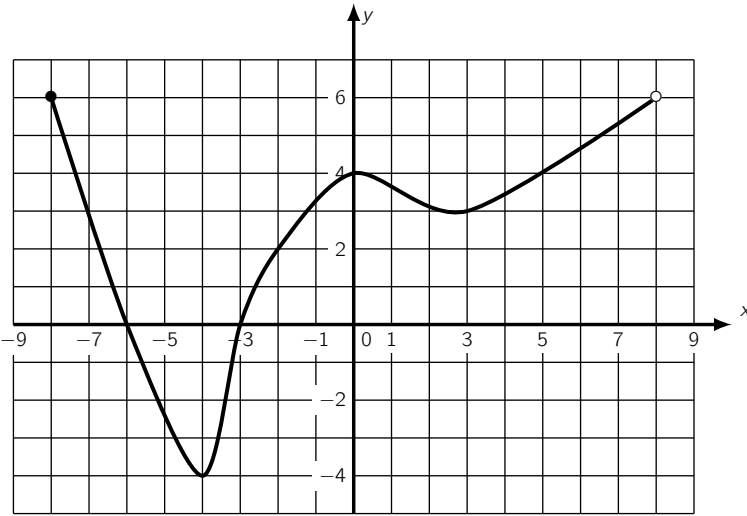


1. Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction.
2. Déterminer les racines de la fonction.
3. Réaliser le tableau de signe de la fonction.

x	
y	

Exercice 2

Le graphe ci-dessous représente une fonction.



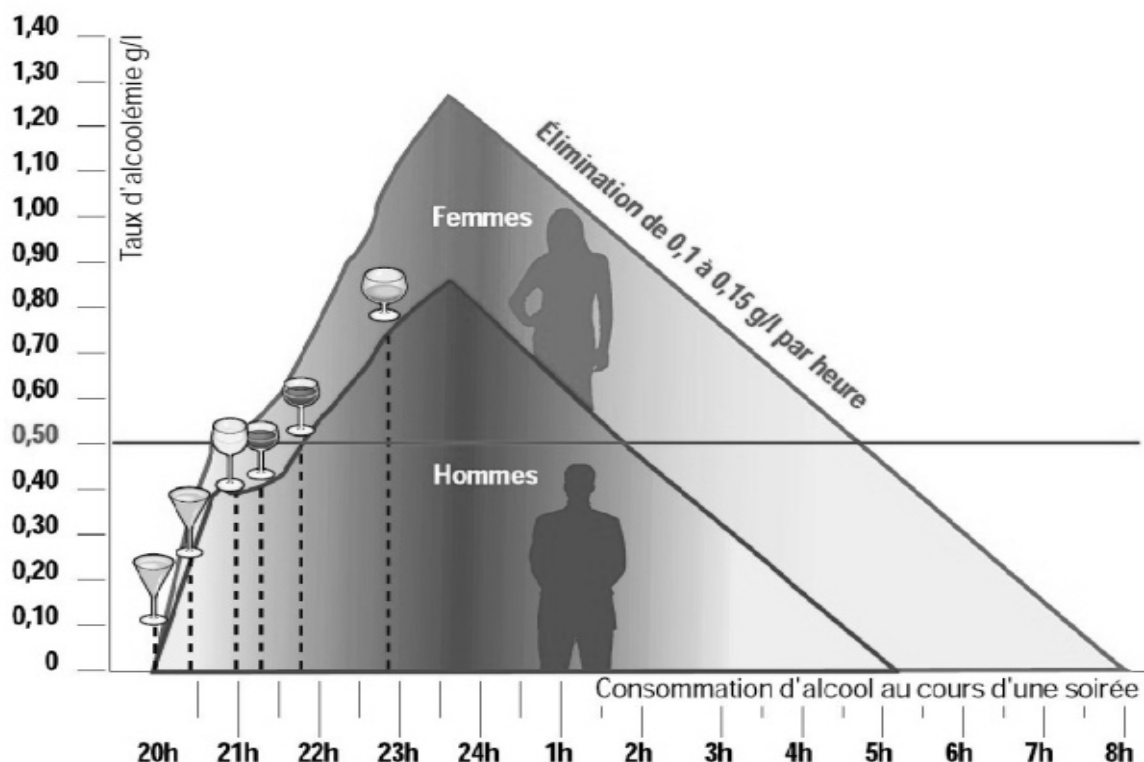
1. Déterminer le domaine et l'ensemble image de la fonction.
2. Déterminer les racines de la fonction.
3. Réaliser le tableau de signe de la fonction.

x	
y	

7.1 Activité – Taux d'alcoolémie

Une bande d'amis passe une soirée ensemble. Au cours de celle-ci, Sandrine boit d'abord deux verres d'apéritif, puis une bière, ensuite deux verres de vin rouge et un verre de champagne en fin de repas.

L'évolution de son taux d'alcoolémie ⁽¹⁾ est représentée sur le graphique suivant ⁽²⁾ (courbe supérieure) :



(1). Le taux d'alcoolémie est exprimé en grammes d'alcool par litre de sang.

(2). Source : <https://www.points12.fr/dangers-de-la-route/alcool-et-conduite/>

Se basant sur le graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Le repas a commencé à 20 heures. Sandrine décide de rentrer chez elle à 3 heures du matin. Est-elle en état de conduire sa voiture, sachant que le taux maximal autorisé est de 0,2 g/l (si Sandrine avait été une conductrice expérimentée, ce taux aurait été de 0,5 g/l).
2. Alexandre, qui a son permis depuis plus de trois ans (conducteur expérimenté), lui propose alors de la reconduire. Est-il dans la légalité s'il prend le volant à 3 heures ?
3. Sandrine ne souhaite pas se faire raccompagner. Quelle heure devra-t-elle alors attendre avant de pouvoir reprendre le volant ?
4. À quelle heure aurait-elle pu prendre le volant si elle était une conductrice expérimentée ?
5. Décrire la variation du taux d'alcoolémie de Sandrine au cours de la soirée (s'aider d'un tableau pour illustrer le propos).

x	
$f(x)$	

6. Durant quel intervalle de temps Sandrine n'est-elle pas apte à conduire ?

7.2 Exercices

Exercice 1

Soit le tableau de variation suivant :

x	-4		1		2		8
Signe	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	-8		2		2		-2

Compléter :

1. La fonction est croissante sur l'intervalle _____ ;
2. La fonction est décroissante sur l'intervalle _____ ;
3. La fonction est constante sur l'intervalle _____.

Exercice 2

Une fonction f a les caractéristiques suivantes :

1. Elle est définie sur l'intervalle $[-2; 10]$;
2. Elle est croissante sur $[3; 10]$ et décroissante sur $[-2; 3]$;
3. L'image de -2 est 5, un antécédent de 8 est 10 et $f(0) = 2$;
4. Elle admet un minimum au point de coordonnées $(3; -1)$.

Compléter son tableau de variation :

x	
$f(x)$	

Le point de coordonnées $(6; -2)$ peut-il appartenir à cette courbe ?

Exercice 3

Chacun des tableaux de variation suivants comporte une erreur. L'identifier et expliquer en quoi c'est une erreur.

Tableau 1 :

x	-5	-2	1	4
$f(x)$	4	7	-2	0

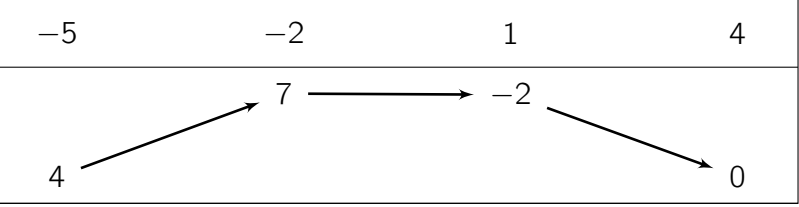


Tableau 2 :

x	-10	7	10
$f(x)$	-5	-7	-9

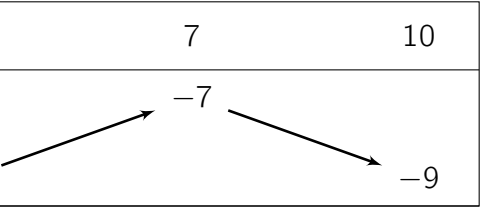


Tableau 3 :

x	3	6	-9	12
$f(x)$	4	666	-32	1

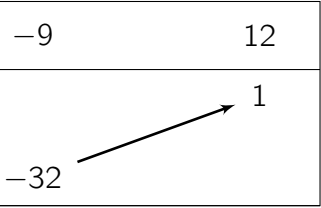


Tableau 4 :

x	-10	-7	0
$f(x)$	-8	0	0



Tableau 5 :

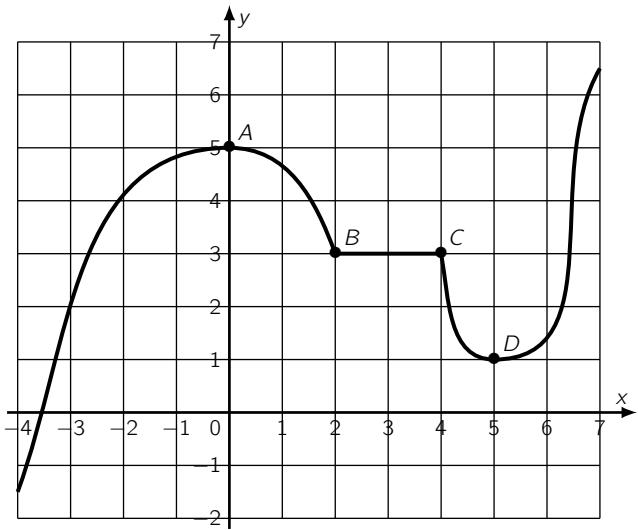
x	-1000	0	1000
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$



Exercice 4

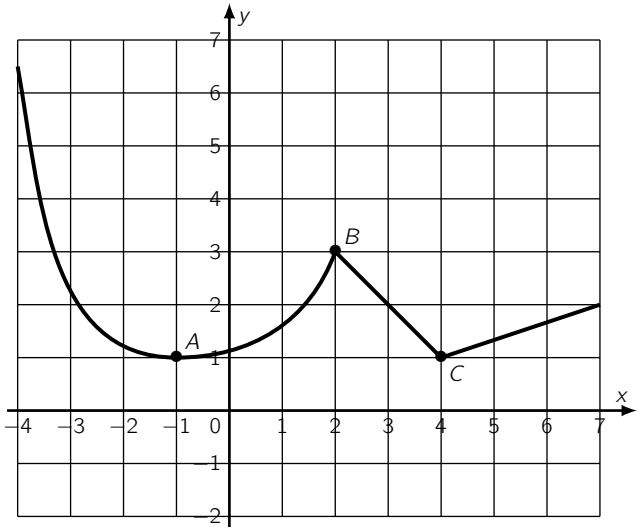
Établir le tableau de variation des fonctions suivantes :

Graphe 1 :



x	
f(x)	

Graphe 2 :



x	
f(x)	

Exercice 5

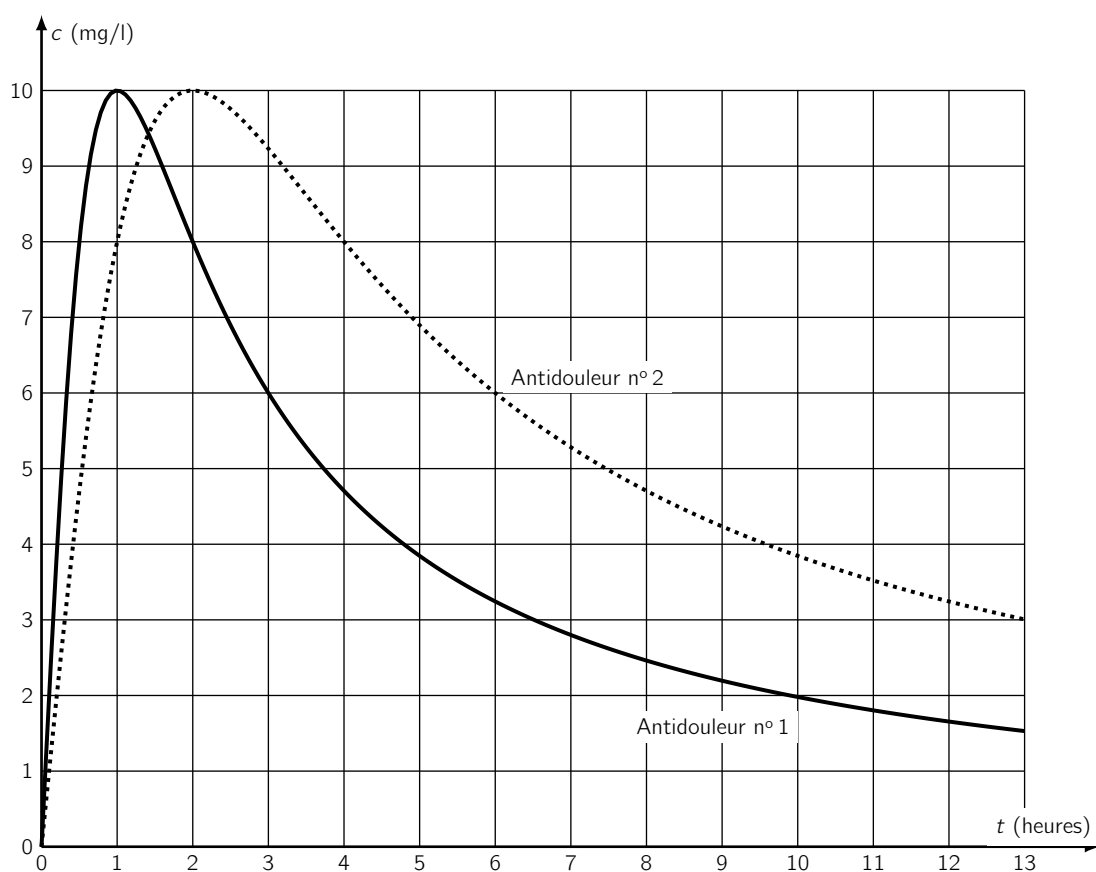
Exercice sur deux pages !

Les deux courbes du graphe ci-dessous montrent la concentration de principe actif dans le sang (en mg/l) en fonction du temps (en heures) pour deux formes différentes d'un antidouleur.

Leur action dans le corps est proportionnelle au taux de principe actif dans le sang.

Pour qu'un médicament soit efficace, il faut que sa concentration dans le sang dépasse une certaine valeur, appelée *niveau thérapeutique minimal*.

Si le niveau thérapeutique minimal, pour ces antidouleurs, est de 6 mg/l, déterminer graphiquement à partir de quel moment les médicaments ne seront plus efficaces.



Suite de l'exercice page suivante.

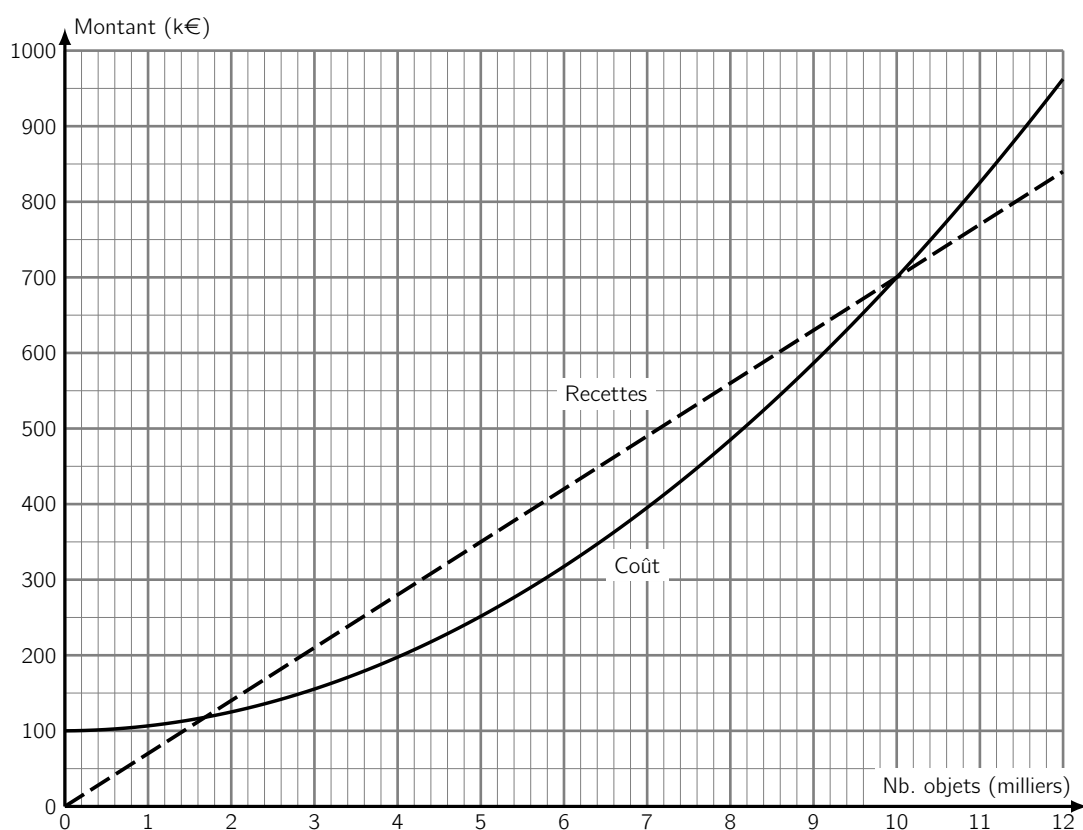
Répondre aux questions ci-dessous :

1. Pour chaque forme d'antidouleur, déterminer graphiquement sa concentration (en mg/l) dans le sang après 30 minutes, après 3 heures et après 6 heures.
2. Au bout de combien de temps chaque concentration est-elle maximale ?
3. Pour chaque médicament, indiquer sur quel intervalle de temps la concentration est croissante.
4. À quels instants a-t-on une concentration de 8 mg/l pour chacun des produits ?
5. À quel moment les deux concentrations sont-elles égales ?
6. Quel antidouleur vaut-il mieux prendre si l'on veut soulager la douleur rapidement ? Expliquer.

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

8.1 Activité – Bénéfices

Une entreprise peut fabriquer, par mois, entre 0 et 12 000 objets. Les fonctions coût et recettes en fonction de la quantité produite et vendue sont représentées ci-dessous.



Par lecture graphique, indiquer sous forme d'intervalle les quantités à produire et à vendre pour que l'entreprise réalise des bénéfices.

8.2 Activité – Scooters

Le scooter de Morgane consomme 4,5 litres aux 100 km et son réservoir contient 5,5 litres d'essence.

Le scooter de Victor consomme 3,6 litres aux 100 km et son réservoir contient 4,6 litres d'essence.



Comparons le nombre de litres restant dans les réservoirs des scooters pour le même nombre de kilomètres parcourus.

Commençons par compléter le tableau suivant :

Nombre de km	Nombre de litres restant chez Morgane	Nombre de litres restant chez Victor
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		

1. Répondre en utilisant le graphique :

- * Que se passe-t-il à l'intersection des deux droites ?

- * Au bout de 50 km, qui a le plus d'essence dans son réservoir ?

- * Pour quels kilométrages, le réservoir de Victor contient-il plus de carburant que celui de Morgane ?

2. Désignons par x le nombre de kilomètres parcourus. En utilisant uniquement le graphique, répondre aux questions suivantes :

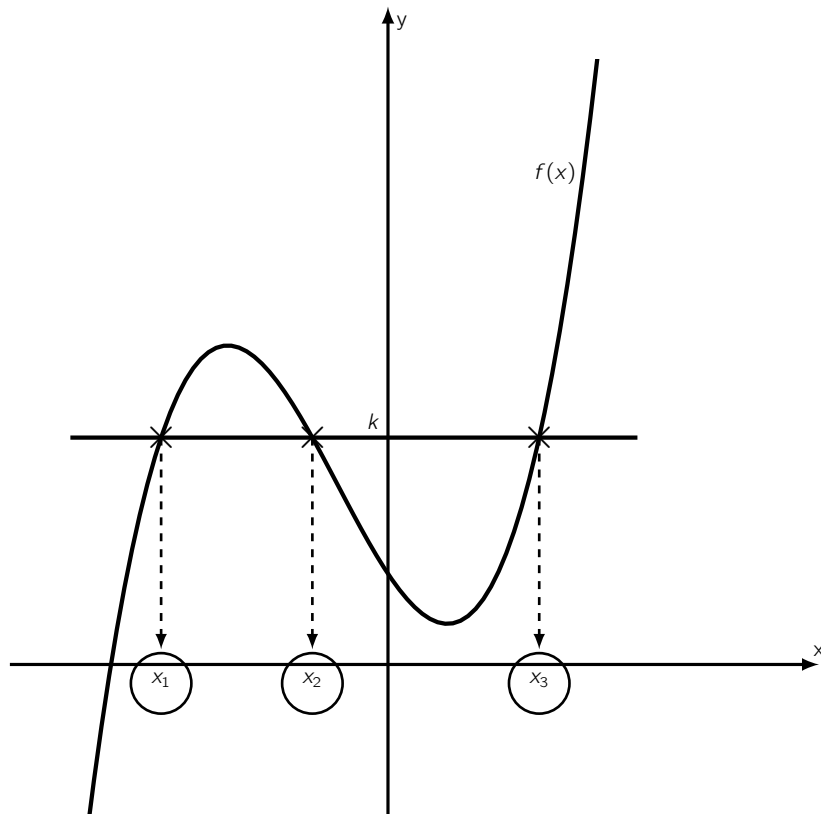
- * À quoi correspond la solution de l'équation suivante ?
$$4,6 - 0,036x = 2,1$$

- * À quoi correspond la solution de l'inéquation suivante ?
$$4,6 - 0,036x > 5,5 - 0,045x$$

8.3 En règle générale

8.3.1 Droite parallèle à l'axe des abscisses

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = k$.



Pour ce faire, il faut :

- tracer la droite parallèle à l'axe des x et passant par $y = k$;
- repérer les intersections entre la fonction et cette droite (les croix) ;
- repérer la coordonnée x (abscisse) de chaque point d'intersection.

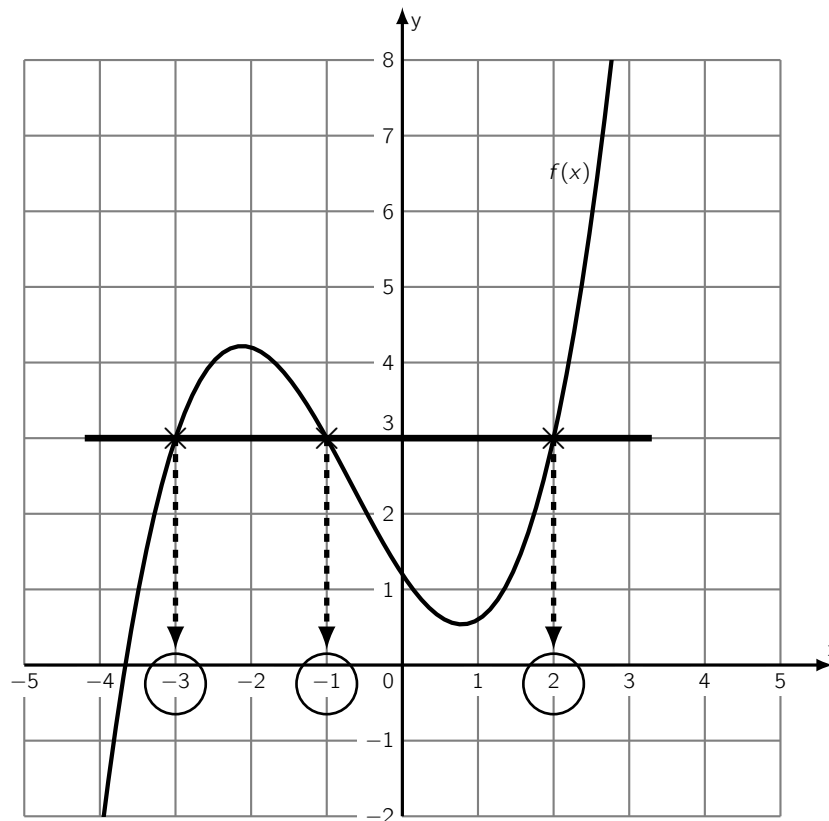
La solution est donc : $S = \{x_1; x_2; x_3\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (x_1; k); (x_2; k); (x_3; k)$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = 3$.



Pour ce faire, il faut :

- tracer la droite parallèle à l'axe des x et passant par $y = 3$;
- repérer les intersections entre la fonction et cette droite (les croix) ;
- repérer la coordonnée x (abscisse) de chaque point d'intersection.

La solution est donc : $S = \{-3; -1; 2\}$

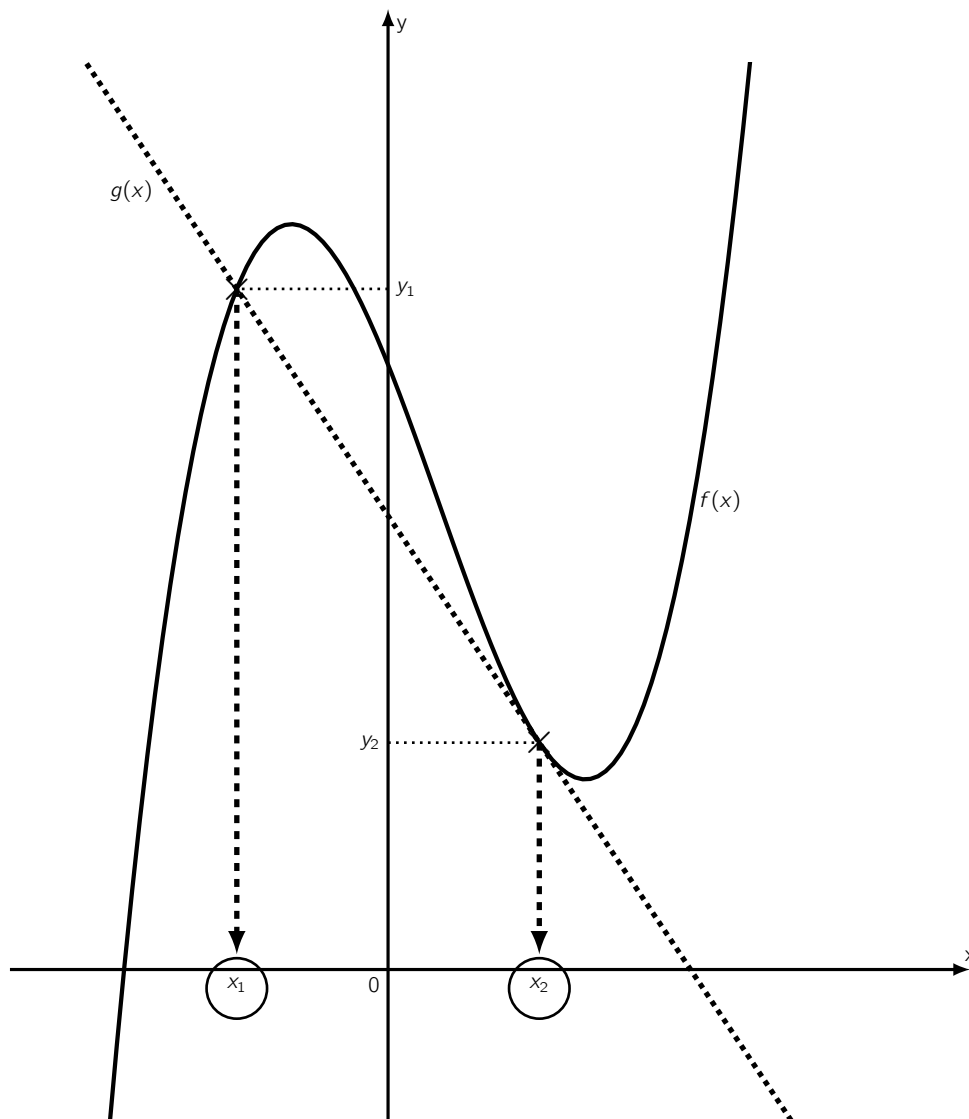
Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (-3; 3); (-1; 3); (2; 3)$$

Voyez-vous la différence de notation ?

8.3.2 Fonction affine

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

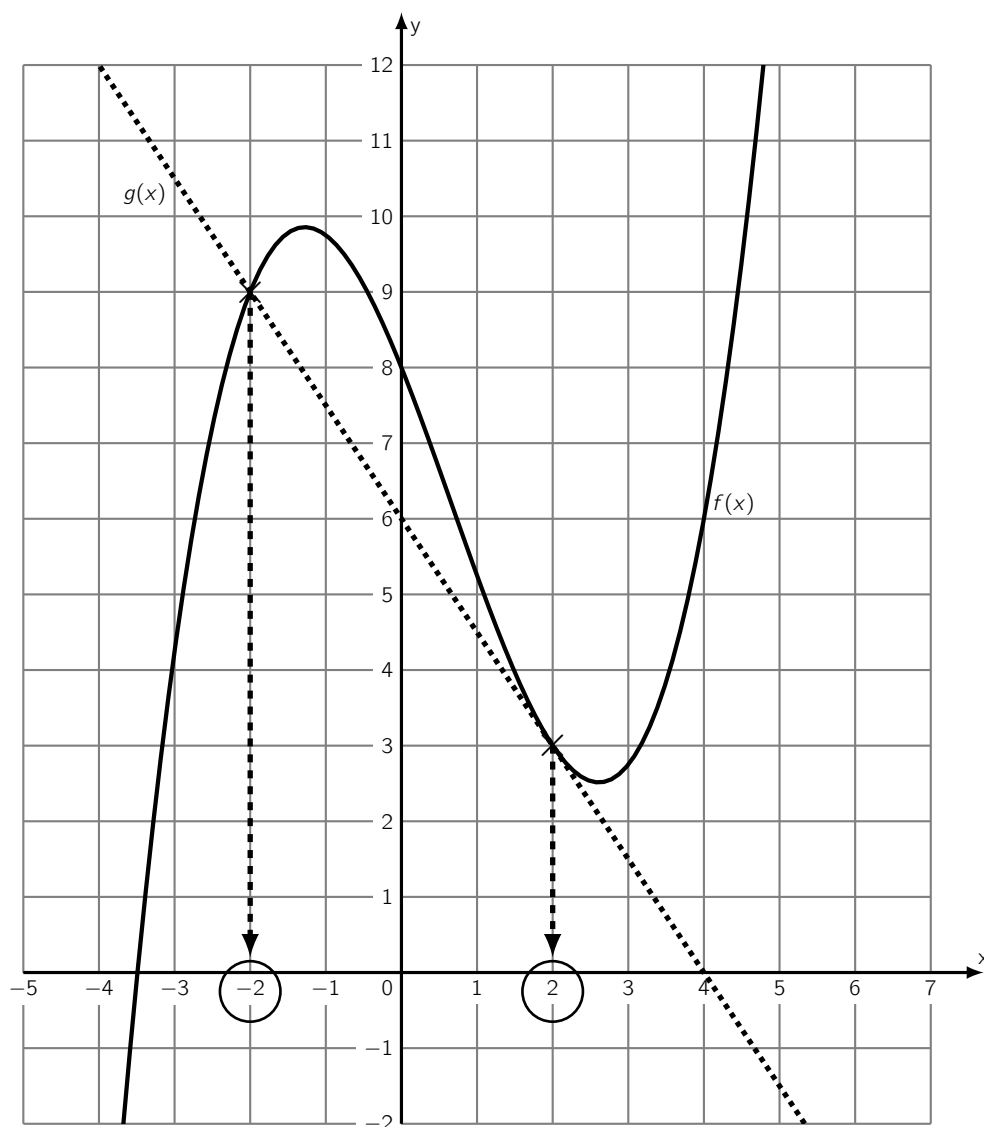
La solution est donc : $S = \{x_1; x_2\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (x_1; y_1); (x_2; y_2)$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

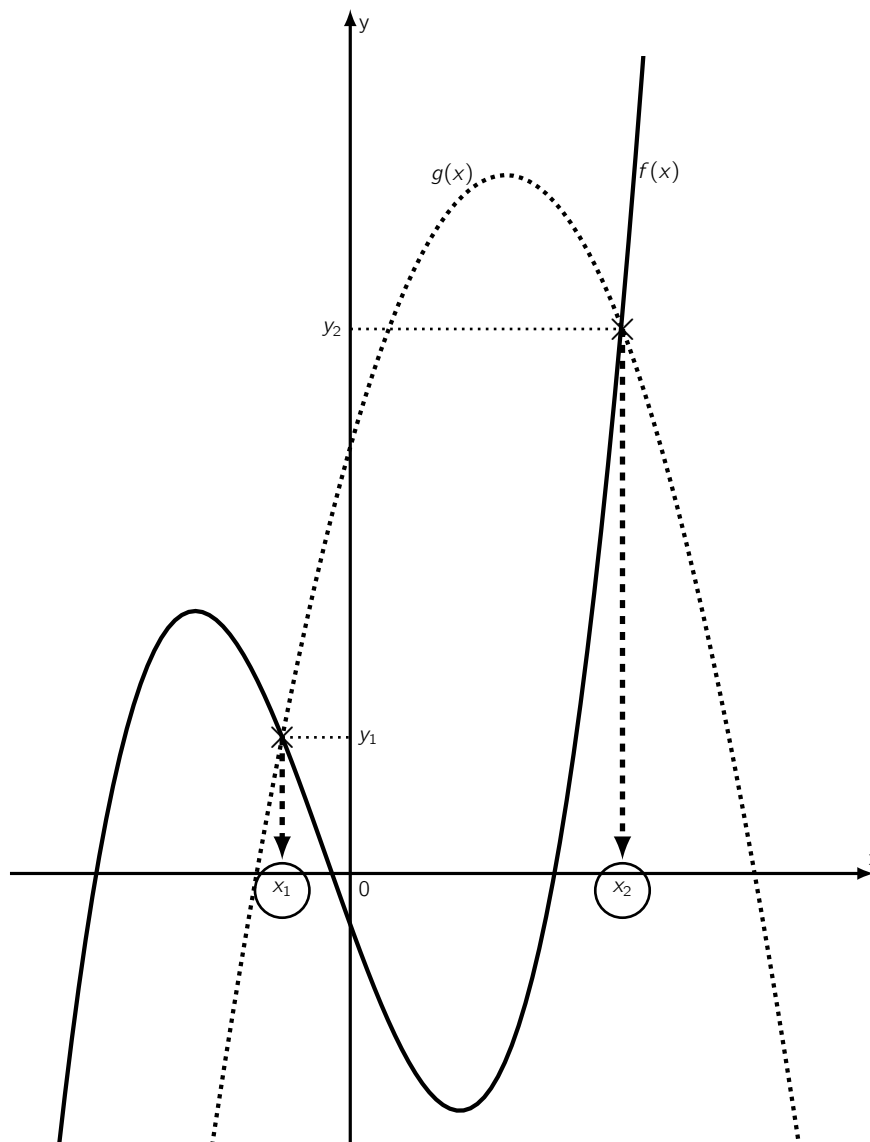
La solution est donc : $S = \{-2; 2\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (-2; 9); (2; 3)$$

8.3.3 Fonction quelconque

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

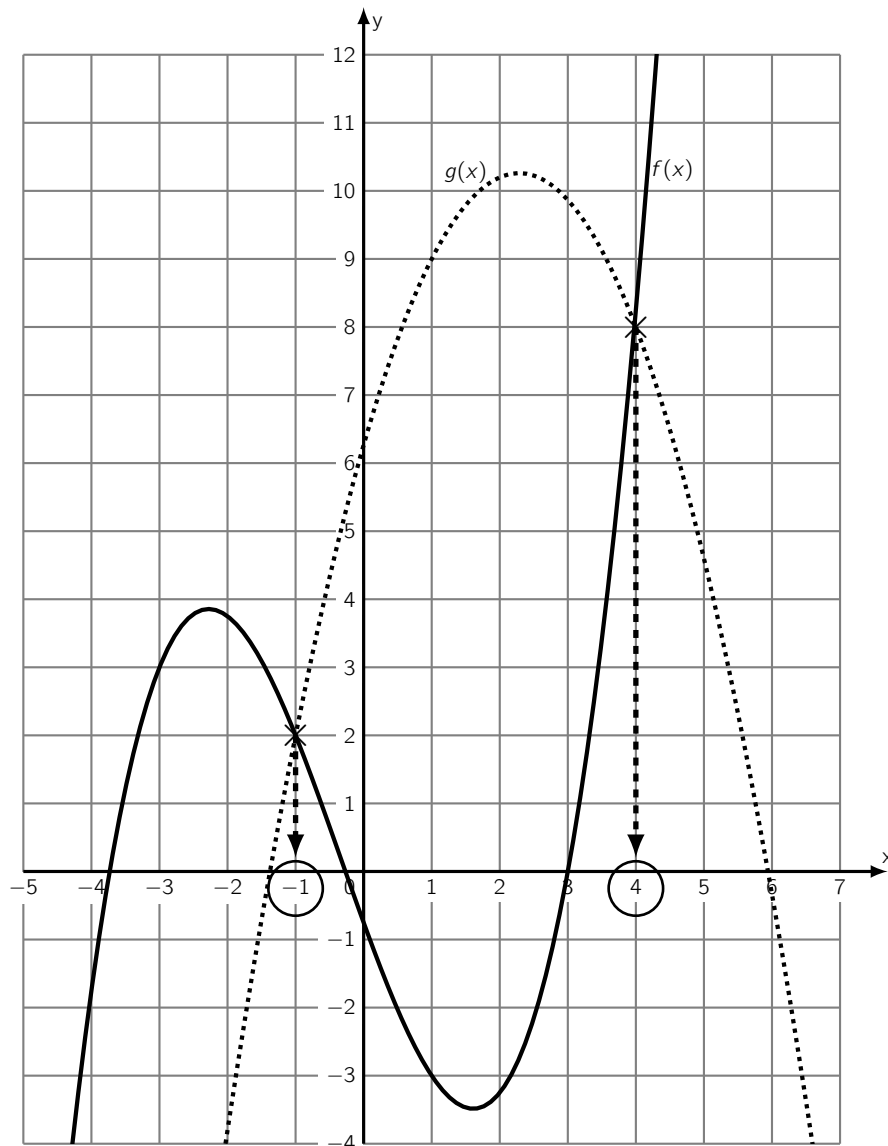
La solution est donc : $S = \{x_1; x_2\}$

Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (x_1; y_1); (x_2; y_2)$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection.

La solution est donc : $S = \{-1; 4\}$

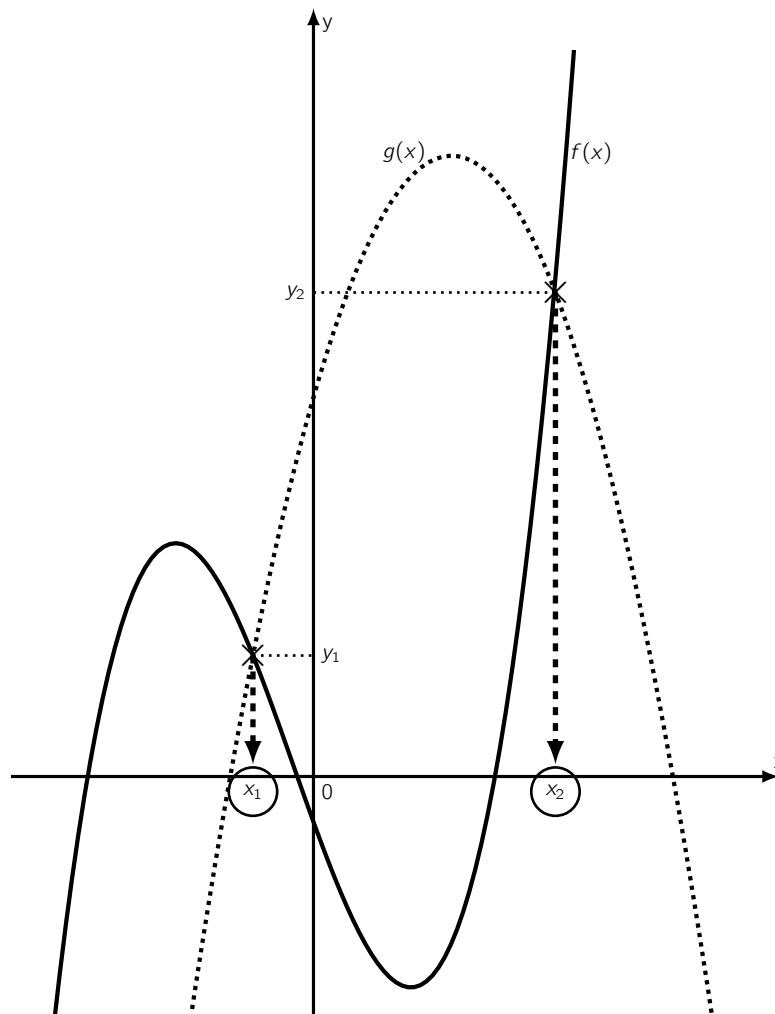
Par contre, s'il avait été demandé de déterminer les points d'intersection entre la fonction et la droite, il aurait fallu écrire les coordonnées des points :

$$S = (-1; 2); (4; 8)$$

8.3.4 Et en cas d'inéquation ?

Soit à déterminer les solutions de $f(x) \leq g(x)$.

Reprenons le graphe de la page précédente.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection (les valeurs sont-elles acceptées ?) ;
- vérifier le long de l'axe des abscisses si la condition est respectée (ici : $f(x) \leq g(x)$) ;
- indiquer la solution sous la forme d'intervalle (avec des crochets).

La solution est donc : $S = [x_1; x_2]$

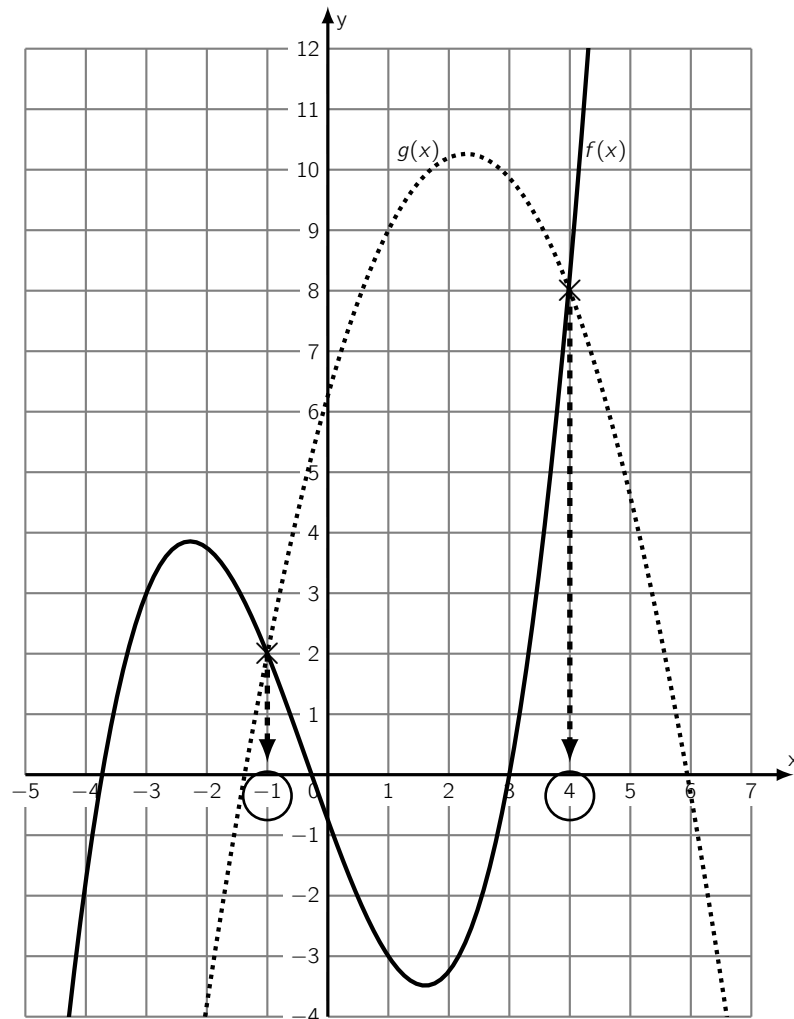
Et si la condition avait été $f(x) \geq g(x)$, la solution aurait été :

$$S =]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$$

Exemple

Soit à déterminer les solutions de $f(x) \leq g(x)$.

Reprenons le graphe de la page précédente.



Pour ce faire, il faut :

- repérer les intersections entre les deux fonctions (les croix) ;
- repérer la coordonnée x de chaque point d'intersection (les valeurs sont-elles acceptées?) ;
- vérifier le long de l'axe des abscisses si la condition est respectée (ici : $f(x) \leq g(x)$) ;
- indiquer la solution sous la forme d'intervalle (avec des crochets).

La solution est donc : $S = [-1; 4]$

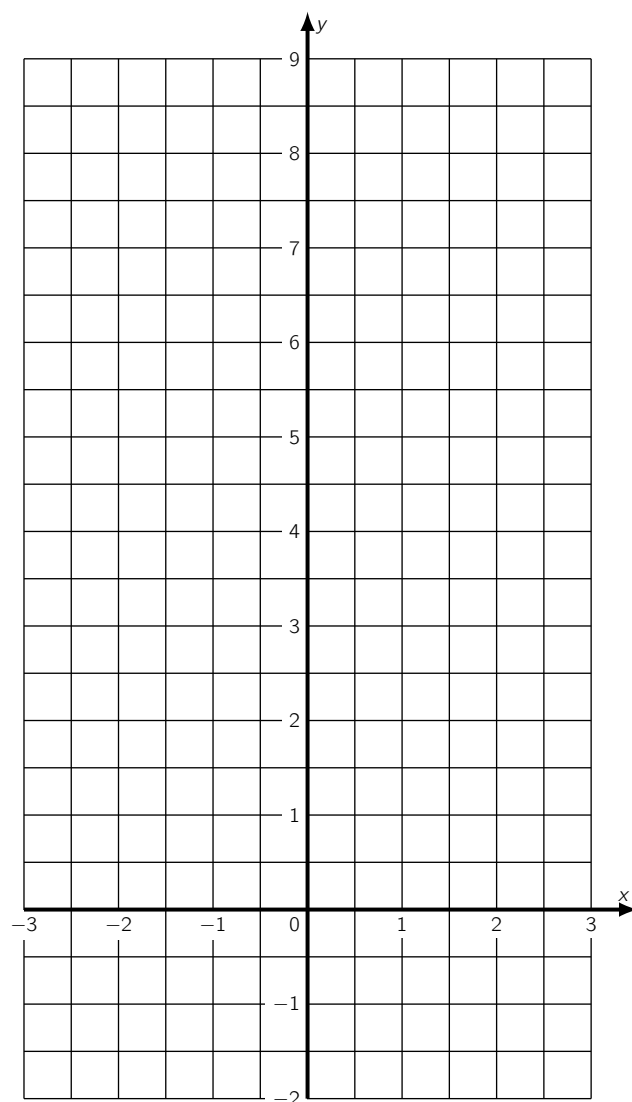
La condition est $f(x) \geq g(x)$? Alors la solution est : $S =]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$

Remarque utile : Je vous invite à aller lire attentivement le document de synthèse de l'UAA 1 sur mon site ([▷ Cours](#)).

8.4 Exercices

Exercice 1

Soit le repère suivant :



1. Représenter, sur le même repère ci-dessus, les fonctions

$$f(x) = x^2 - 1$$

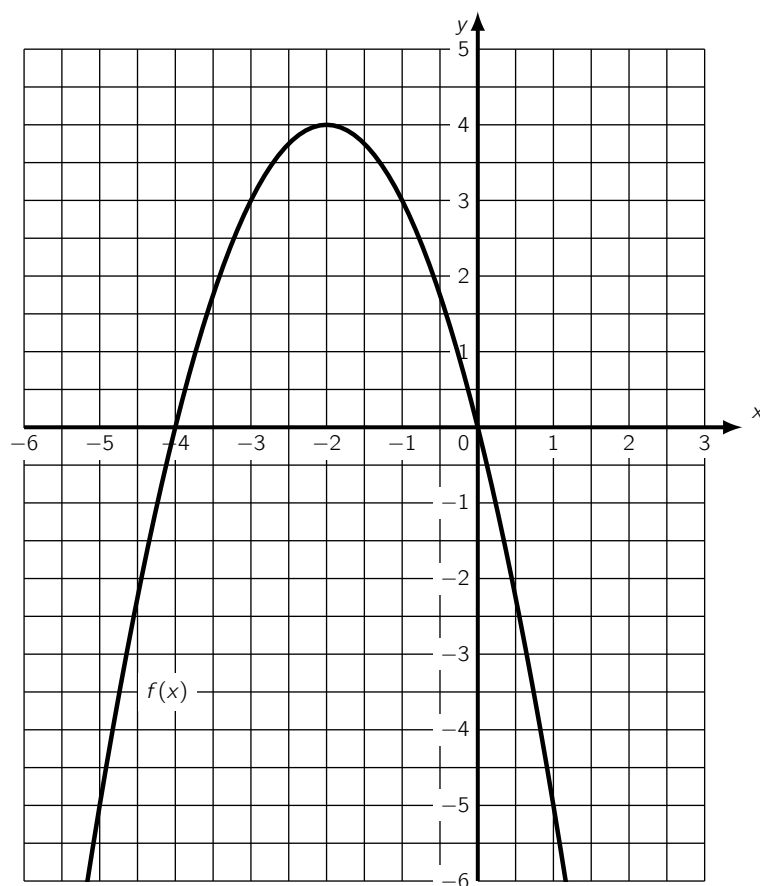
et $g(x) = 0$.

2. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection entre les fonctions f et g , ce qui revient à résoudre $f(x) = g(x)$.

→ $S =$

Exercice 2

Soit le graphe suivant :



Avec : $f(x) = -x^2 - 4x$.

1. Représenter, sur le repère ci-dessus, la fonction $g(x) = -2x - 3$.
2. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection entre les fonctions f et g .

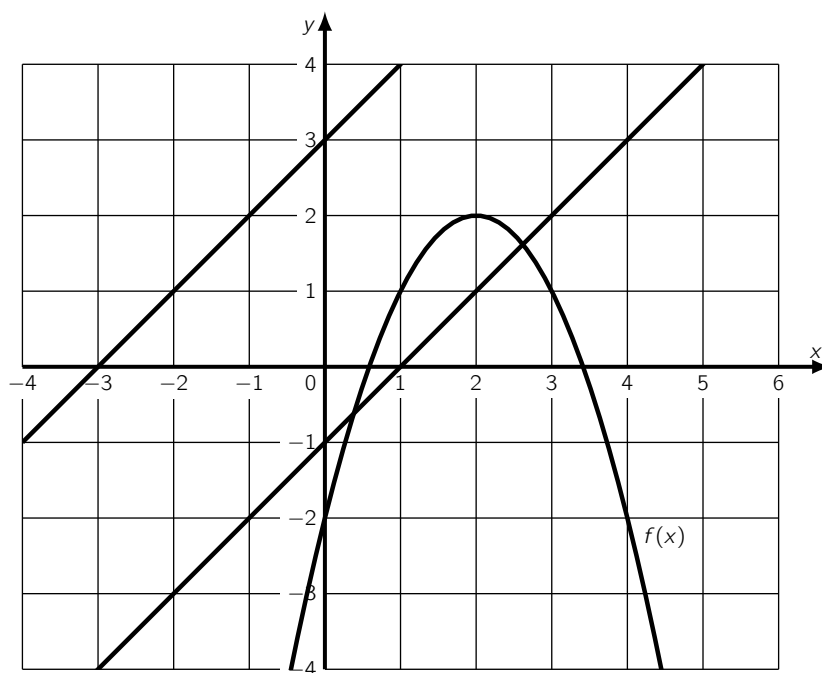
→ $S =$

3. Résoudre graphiquement l'inéquation suivante : $f(x) < g(x)$

→ $S =$

Exercice 3

Soit le graphe suivant :



Avec : $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes (s'il n'y a pas de solution, expliquer pourquoi).

a) $-x^2 + 4x - 2 = 1 \quad \rightarrow S =$

b) $-x^2 + 4x - 2 = -2 \quad \rightarrow S =$

c) $-x^2 + 4x - 2 = 4 \quad \rightarrow S =$

d) $-x^2 + 4x - 2 = x + 3 \quad \rightarrow S =$

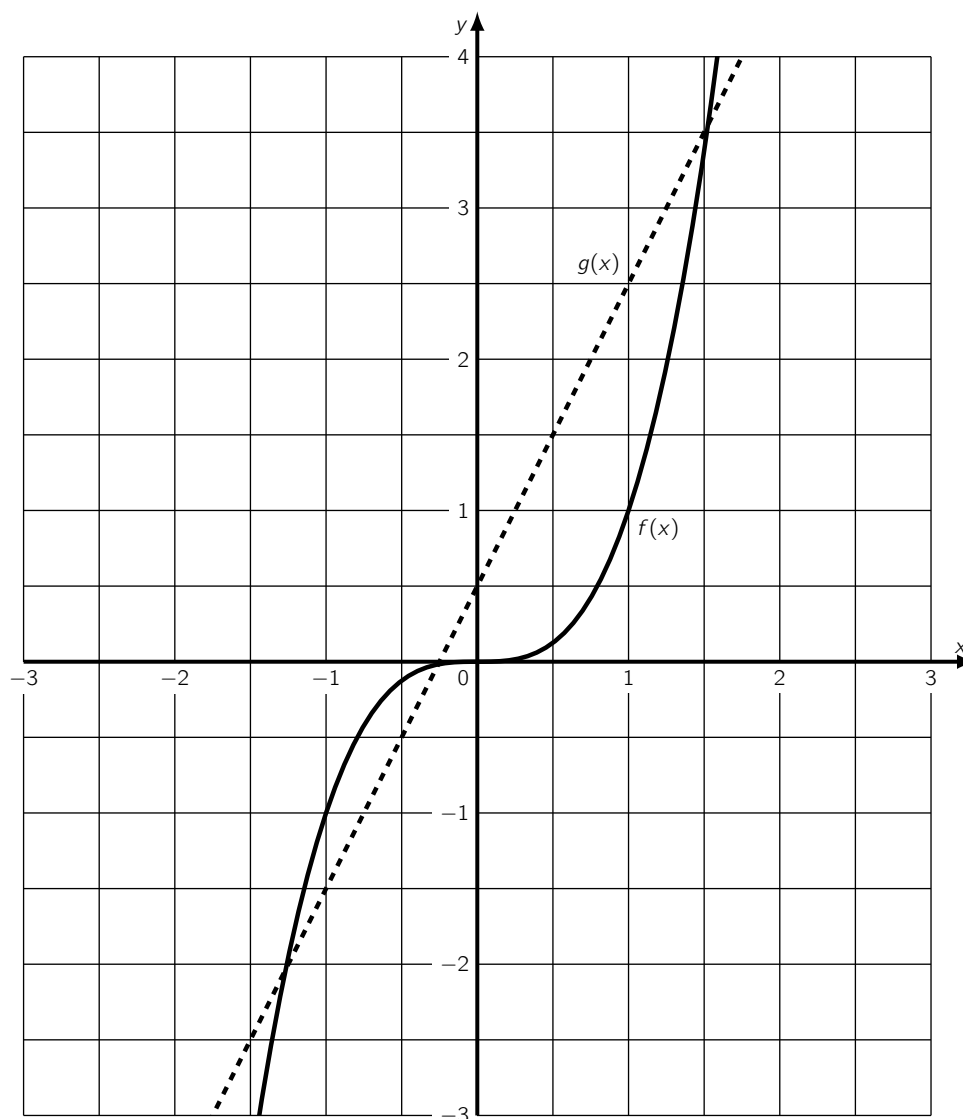
e) $-x^2 + 4x - 2 = x - 1 \quad \rightarrow S =$

f) $-x^2 + 4x - 2 > 1 \quad \rightarrow S =$

g) $-x^2 + 4x - 2 \leq x - 1 \quad \rightarrow S =$

Exercice 4

Soit le graphe suivant :



Avec : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 2x + \frac{1}{2}$.

Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a) $x^3 = 1$ $\rightarrow S =$

b) $x^3 = 2,5$ $\rightarrow S =$

c) $x^3 = 2x + \frac{1}{2}$ $\rightarrow S =$

UAA 2

Modèles de croissance

(Partie 5^e TQ)

Chapitre 1

Rappels

Nous avons vu précédemment la définition d'un graphe (p.60).

Rappelons simplement que pour réaliser un graphe, nous avons besoin de :

- * Un plan ;
- * Des axes linéaires, perpendiculaires, orientés, (généralement) normés et nommés ;
- * Une origine, une échelle sur chaque axe et des points à placer sur le plan.

Chaque point possède des coordonnées notées dans l'ordre chronologique : $(x; y)$, x étant l'abscisse du point et y étant son ordonnée.

Maintenant que nous nous sommes remémoré ce stricte minimum, et comme un schéma vaut mieux que mille mots, passons directement à ce qui nous intéresse.

2.1 Construction d'un tableau de nombres à partir d'une formule

2.1.1 Activité – Distance de freinage (1)

Sur une route sèche et horizontale, la distance de freinage D (en mètres) d'une voiture, à partir du moment où le conducteur freine réellement, est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot c}$$

où

- * v est la vitesse au moment du freinage (en m/s) ;
 - * g est l'accélération de la pesanteur ($9,81m/s^2$) ;
 - * c est le coefficient de frottement qui dépend de la nature et de la qualité du revêtement.
- On supposera $c = 0,7$.

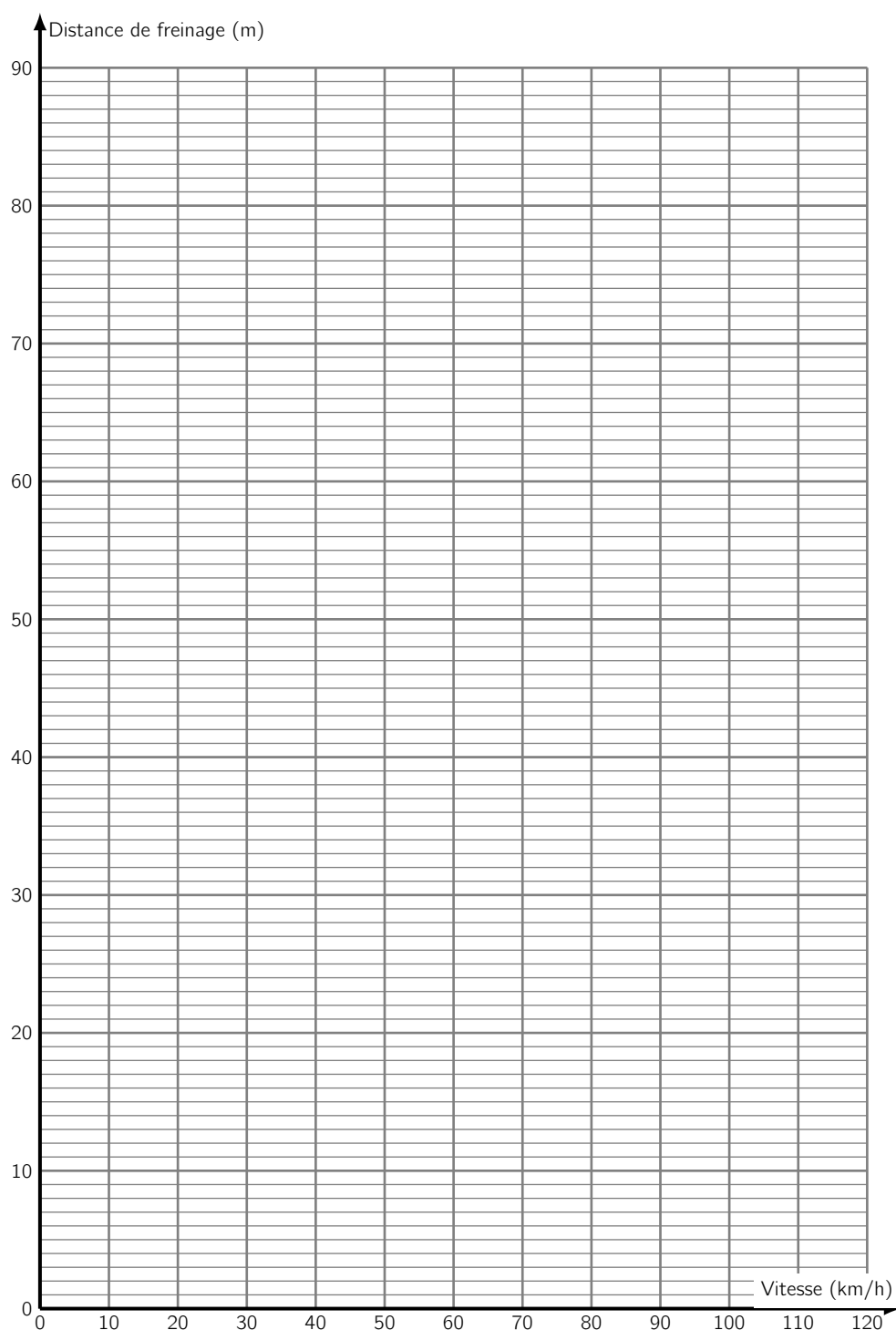
Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au centième près.

Vitesse (km/h)	20	30	50	70	90	120
Vitesse (m/s)						
Distance de freinage (m)						

2.2 Construction d'un graphe à partir d'un tableau de nombres

2.2.1 Activité – Distance de freinage (2)

Sur base du tableau déterminé ci-dessus, réaliser le graphe représentant la distance de freinage (en mètres) du véhicule en fonction de sa vitesse (en km/h).



2.3 Exercices

Exercice 1

Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous sur des feuilles séparées.

1. $f(x) = x^2 - 12x + 27$

2. $f(x) = x^2 + 3x - 4$

3. $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

4. $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$

5. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

6. $f(x) = -x^2 - 2x + 20$

7. $f(x) = x^2 - 4x - 5$

8. $f(x) = x^2 - 5x + 4$

9. $f(x) = (x - 3)^2 - 25$

10. $f(x) = (2 - x)^2 - 9$

Chapitre 3

Les fonctions de référence

Certaines des fonctions présentes dans ce cours le sont à titre de rappel.

3.1 Fonction constante

3.1.1 Définition

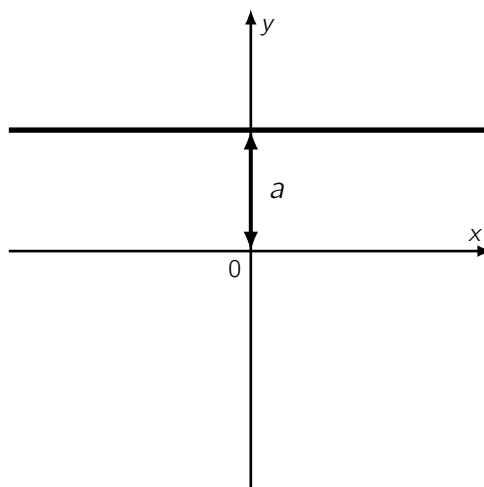
* Une fonction constante est de la forme

$$f(x) = a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

* dans la littérature, on retrouve plutôt la notation suivante :

$$f(x) = \text{constante} \quad \text{ou encore} \quad f(x) = c^{ste}$$

3.1.2 Représentation graphique



3.2 Fonction linéaire

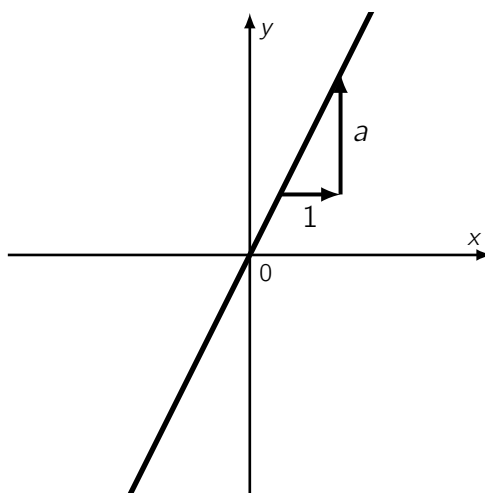
3.2.1 Définition

* Une fonction linéaire est de la forme

$$f(x) = ax \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

3.2.2 Représentation graphique

Dans la fonction $f(x) = ax$, le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou encore *coefficient directeur* de la droite.



3.3 Fonction affine

3.3.1 Définition

* Une fonction du premier degré (à coefficients réels) est de la forme

$$f(x) = ax + b \quad \text{où} \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

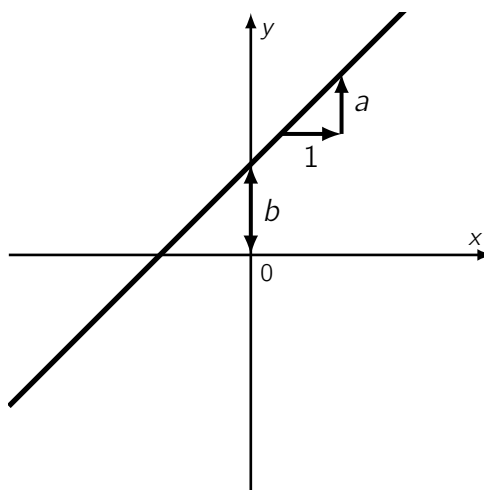
* Remarque : On retrouve assez souvent dans la littérature les notations suivantes :

$$f(x) = mx + p \quad \text{où} \quad m \text{ et } p \in \mathbb{R}, \text{ avec } m \neq 0$$

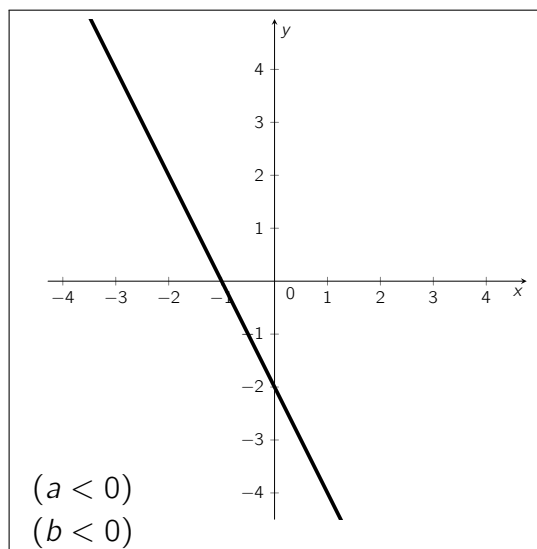
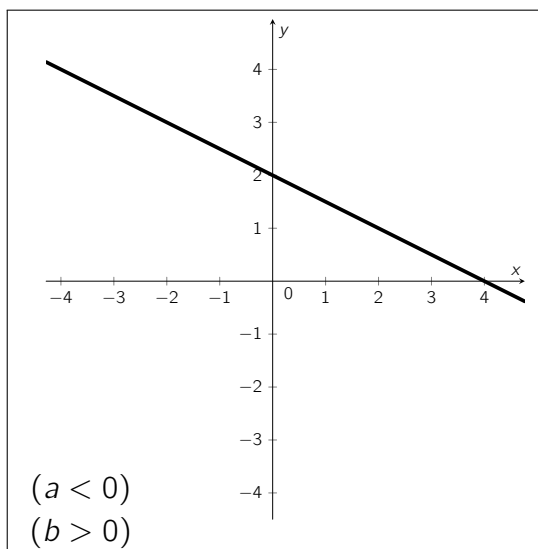
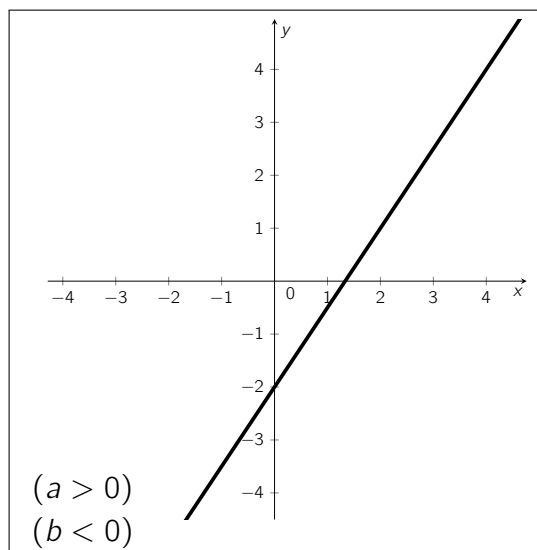
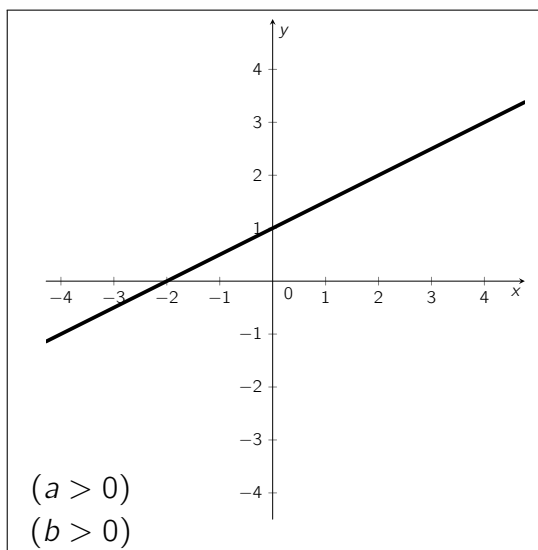
$$\text{ou encore } f(x) = kx + t \quad \text{où} \quad k \text{ et } t \in \mathbb{R}, \text{ avec } k \neq 0.$$

3.3.2 Représentation graphique

Dans la fonction $f(x) = ax + b$, le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou encore *coefficient directeur* de la droite. Le coefficient b est l'*ordonnée à l'origine* de la droite.



Quatre situations sont possibles :



3.4 La fonction de degré 2 : la parabole

3.4.1 Définition

- * La parabole est une fonction polynôme du second degré (à coefficients réels) et est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

- * Le *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, noté Δ , est le nombre défini par

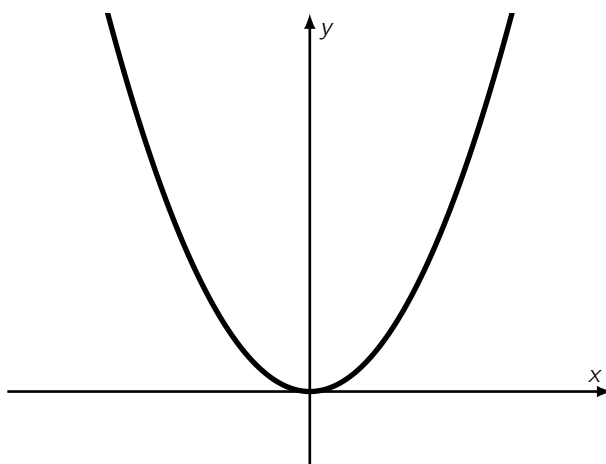
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Remarque : La *fonction polynôme du second degré* peut aussi être appelée *fonction trinôme du second degré*. Par commodité, nous l'appelons généralement *fonction du second degré*.

3.4.2 Représentation graphique

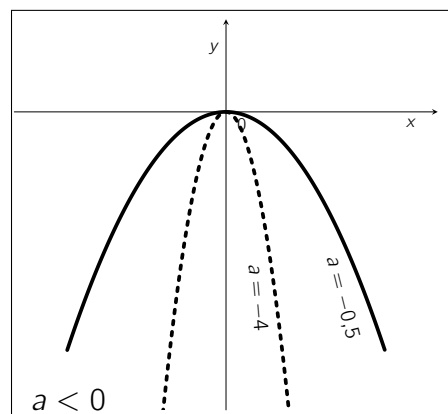
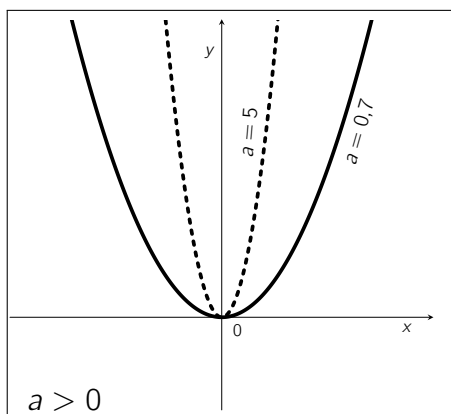
Voici l'allure générale de la fonction lorsque celle-ci est de la forme

$$f(x) = ax^2$$



Nous constatons que, dans ce cas particulier où la fonction s'écrit sous la forme $f(x) = ax^2$, la courbe possède l'axe des y comme axe de symétrie et l'origine du repère $(0; 0)$ comme sommet.

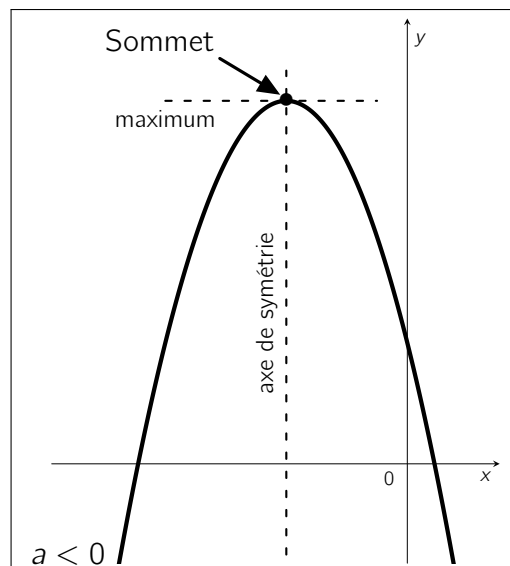
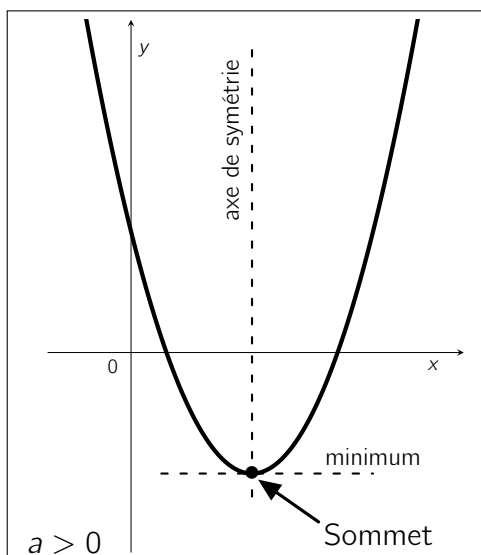
Si l'on modifie le coefficient a , comment la courbe évoluera-t-elle ?



On constate que plus le coefficient a est grand en valeur absolue, plus la courbe se rapproche de l'axe vertical. À l'inverse, plus le coefficient a est petit en valeur absolue, plus la courbe s'éloigne de l'axe vertical.

De manière plus générale, lorsque la fonction s'écrit sous la forme

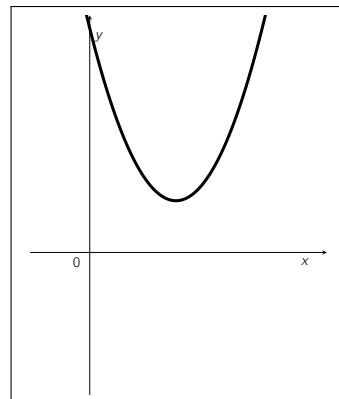
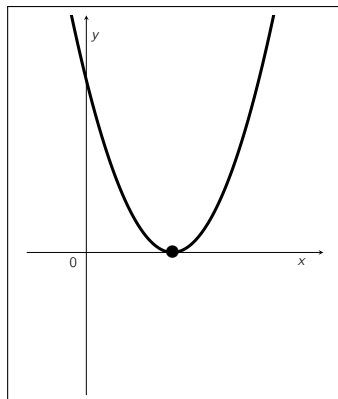
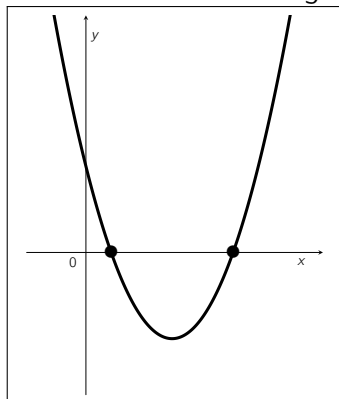
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



3.4.3 Résolution

Comme pour toute fonction, nous pouvons déterminer les zéros de la fonction parabole.

Il existe trois cas de figure ⁽¹⁾ :



Nous allons déterminer les coordonnées du/des points d'intersection entre la fonction et l'axe des x en résolvant l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (dans $\mathbb{R}$) ⁽²⁾. Afin de pouvoir résoudre cette équation, il faut distinguer les trois cas possibles (selon la valeur de Δ qui, je le rappelle, vaut $b^2 - 4ac$) :

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes, x_1 et x_2 , données par les formules ⁽³⁾ :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double, $x_1 = x_2$, généralement notée x_0 , donnée par la formule :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

(1). Les trois cas de figure valent ici pour $a > 0$ mais il existe également trois cas de figure pour $a < 0$.

(2). Nous utiliserons cette méthode dans la résolution des exercices qui se trouvent en fin de chapitre.

(3). Pour les plus curieux d'entre vous, la démonstration des formules se trouve, à titre d'information (donc à ne pas connaître), en page ??.

3.4.4 Applications

Antennes (radiotélescope & télévision par satellite)



Lancer de projectiles (rebond & fontaine)



Four solaire (industriel & personnel)



3.5 La fonction de degré 3

3.5.1 Définition

* Une équation du troisième degré (à coefficients réels) est une équation de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{où} \quad a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

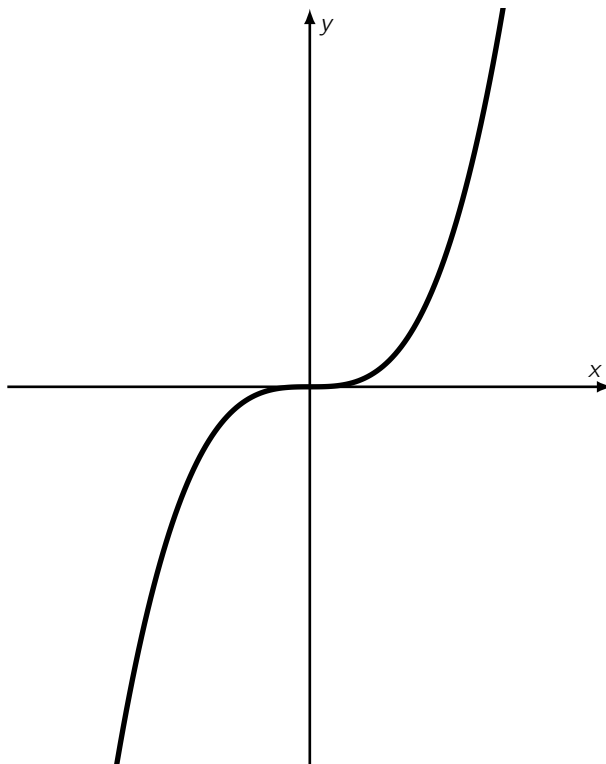
L'étude algébrique de la fonction du troisième degré est relativement complexe. Nous nous contenterons donc de son étude graphique tout en nous limitant à la fonction de base

$$f(x) = ax^3 \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

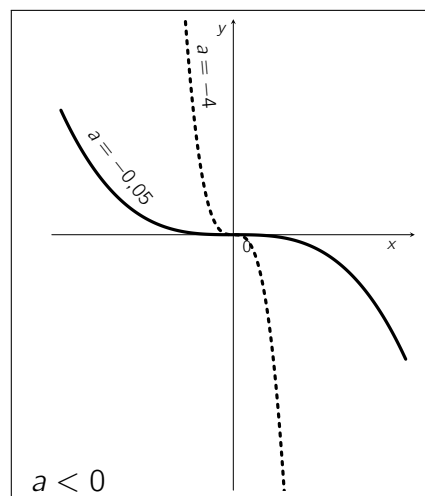
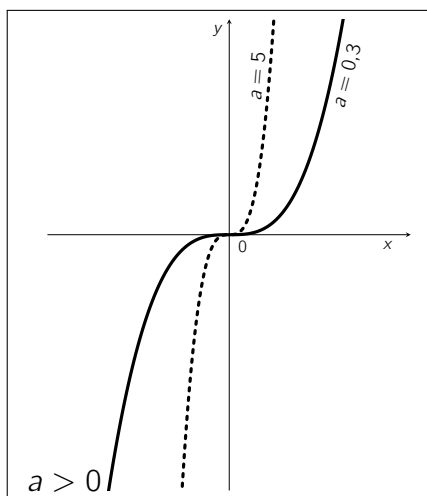
3.5.2 Représentation graphique

Voici l'allure générale de la *fonction cube* lorsque celle-ci est de la forme

$$f(x) = ax^3$$



Si l'on modifie le coefficient a , comment la courbe évoluera-t-elle ?



Les mêmes constatations peuvent être faites que pour la fonction de degré 2 : plus le coefficient a est grand en valeur absolue, plus la courbe se rapproche de l'axe vertical. À l'inverse, plus le coefficient a est petit en valeur absolue, plus la courbe s'éloigne de l'axe vertical.

3.6 La fonction inverse

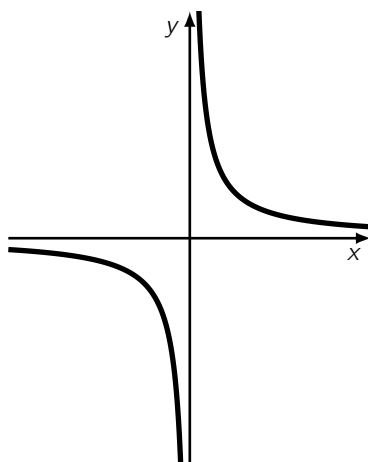
3.6.1 Définition

* La fonction inverse est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{où} \quad x \neq 0.$$

3.6.2 Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction inverse est une courbe que l'on appelle hyperbole.



3.7 La fonction racine carrée

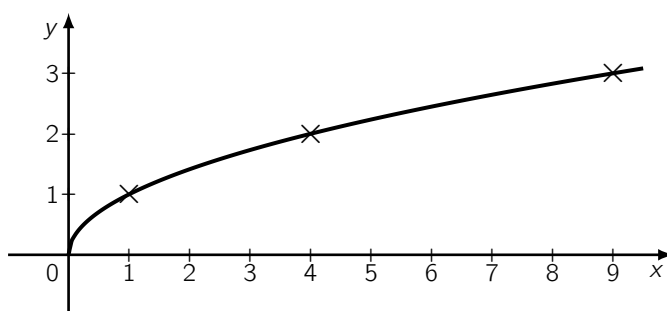
3.7.1 Définition

* La fonction racine carrée est une fonction de la forme

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{où} \quad x \geq 0.$$

3.7.2 Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une courbe que l'on représente comme suit :



3.8 La fonction puissance

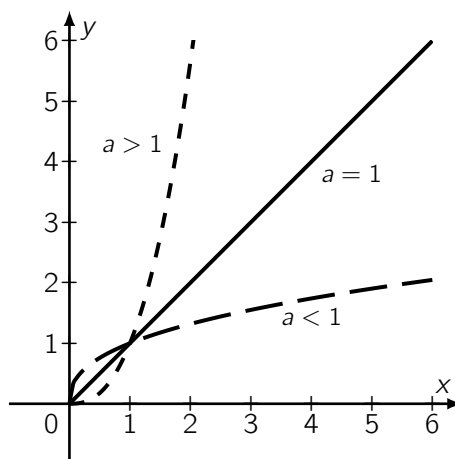
3.8.1 Définition

* La fonction puissance est une fonction de la forme

$$f(x) = x^a \quad \text{où} \quad a \geq 0.$$

3.8.2 Représentation graphique

Nous pourrions même dire qu'il n'existe non pas *une* fonction puissance mais des fonctions puissances. Le graphe suivant met bien cela en évidence.

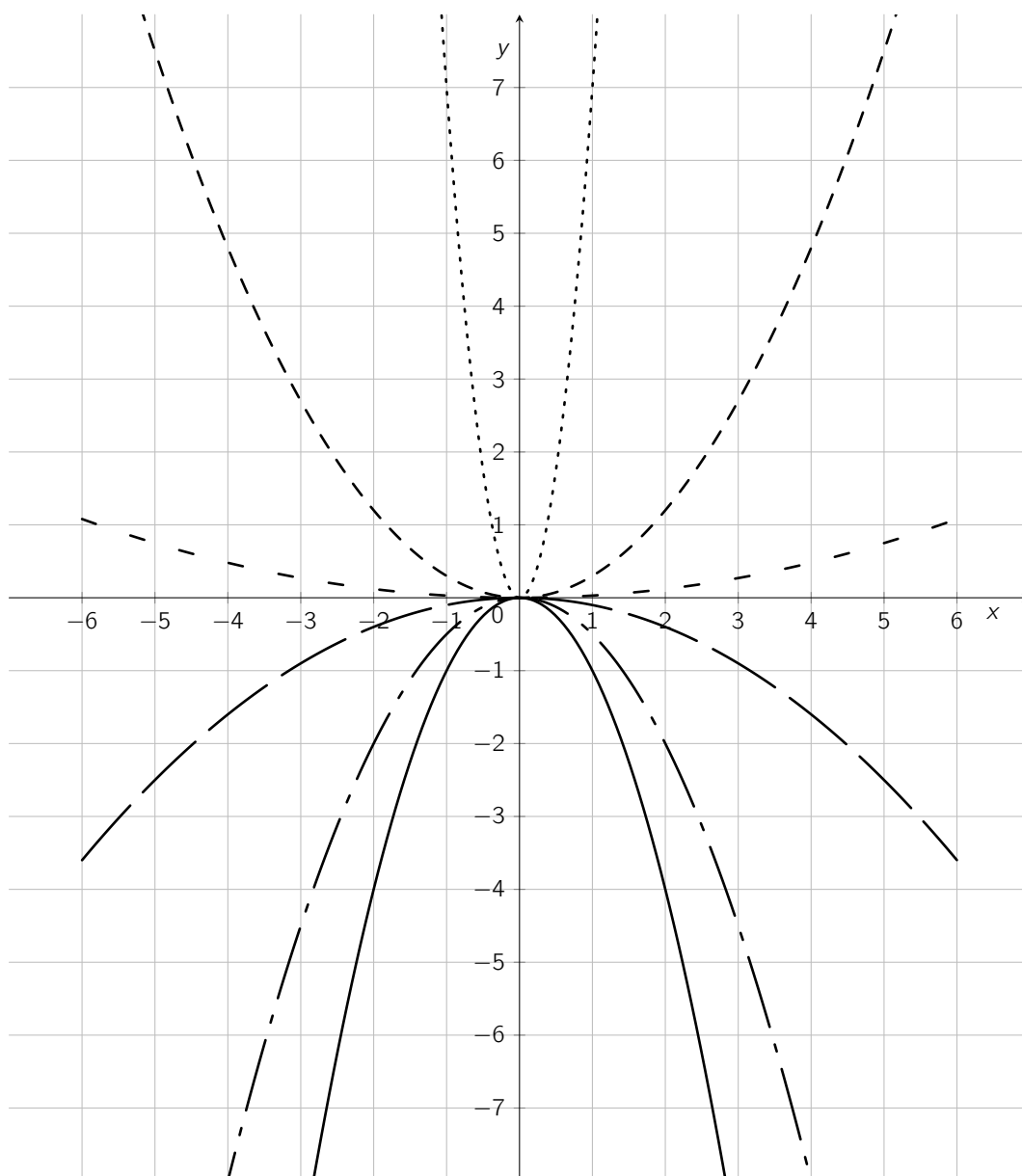


3.9 Exercices

Exercice 1

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^2$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.



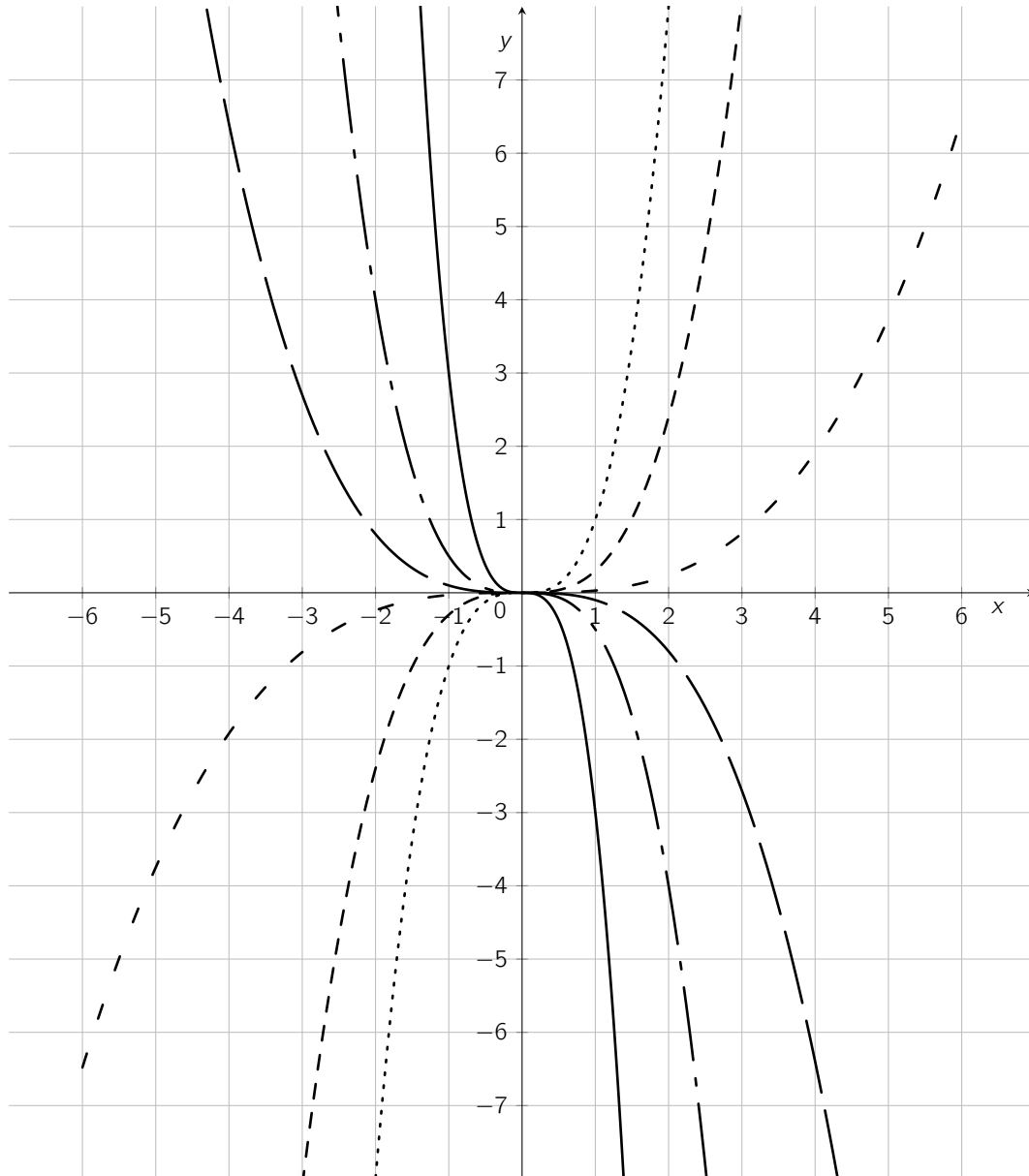
Les différentes valeurs de a sont :

-1 -0,5 7 0,03 -0,1 0,3

Exercice 2

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^3$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.

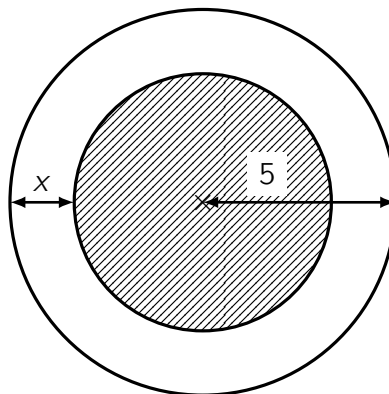


Les différentes valeurs de a sont :

1 -0,5 0,03 -0,1 0,3 -3

Exercice 3

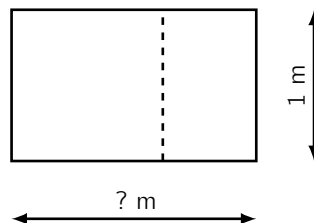
À l'intérieur d'un parterre circulaire dont le rayon vaut 5 mètres, on trace un sentier en forme de couronne.



1. Peut-on dire que l'aire du sentier est proportionnelle à sa largeur ? Écrire la formule qui justifiera la réponse.
2. Quelle doit être la largeur du sentier pour que son aire (aire blanche) soit égale à l'aire hachurée ?
3. Représenter graphiquement l'évolution des aires (blanche et hachurée) en fonction de x . Que constate-t-on ?

Exercice 4

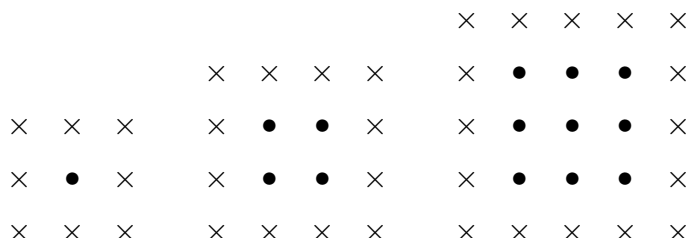
On dit qu'un rectangle est un *rectangle d'or* si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier (préservation du rapport des côtés).



1. Déterminer la longueur d'un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 mètre.
2. Comment appelle-t-on ce nombre bien célèbre ?

Exercice 5

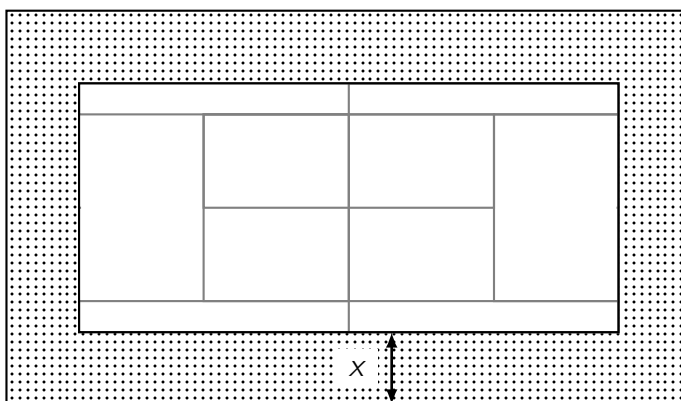
Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de les protéger contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Déterminer le nombre minimum de rangées (n) pour lequel il y a plus de pommiers (•) que de conifères (×).



Pour ce faire, répondre aux questions suivantes :

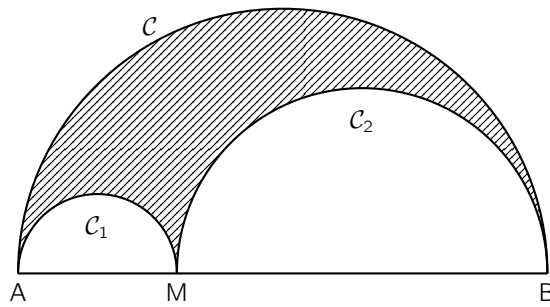
1. Réaliser un tableau comprenant 3 lignes : le nombre de rangées, le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Ce tableau permettra de répondre aisément aux deux questions suivantes.
2. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de pommiers (•) ?
3. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de conifères (×) ?
4. Calcule le nombre minimum de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir plus de pommiers que de conifères.

Exercice 6



Voici un terrain de tennis standard dont les dimensions sont de 23,77 m de long pour 10,97 m de large. Je souhaite construire une zone pour les ramasseurs de balles, autour du terrain, de largeur constante x et dont l'aire est égale à celle du terrain. Calculer la largeur x de cette zone.

Exercice 7



$[AB]$ est un segment, $AB=10$ cm.

$\mathcal{C}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est un point de $[AB]$.

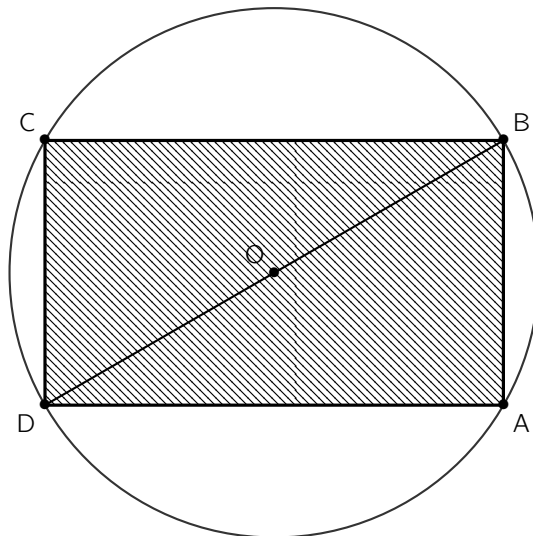
$\mathcal{C}_1$ est le demi-cercle de diamètre $[AM]$. $\mathcal{C}_2$ est le demi-cercle de diamètre $[MB]$.

Le domaine colorié s'appelle un arbel.

On demande d'étudier les variations de l'aire de l'arbel lorsque M parcourt $[AB]$.

Indice : Déterminer la formule de l'aire de l'arbel en fonction de la distance AM (que l'on appellera x par facilité).

Exercice 8



Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm inscrit dans un cercle de 13 cm de diamètre.

Exercice 9

Lors d'un feu d'artifice, chaque fusée explose quand elle atteint, au cours de sa trajectoire, sa hauteur maximale.

La trajectoire d'une fusée pyrotechnique peut être modélisée par la fonction suivante :

$$f(x) = -0,15x^2 + 5,7x$$

L'unité utilisée est le mètre.

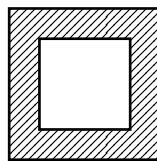
1. Réaliser le graphe de la fonction ci-dessus ;
2. Déterminer graphiquement le maximum de la fonction $f(x)$ ainsi que son $x_{\max}$ correspondant ;
3. Vérifier par le calcul les résultats obtenus au point précédent ;
4. À quelle hauteur la fusée explose-t-elle ?

Exercice 10

Un terrain rectangulaire de 26 mètres sur 30 mètres est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2 , quelle est sa largeur ?

Exercice 11

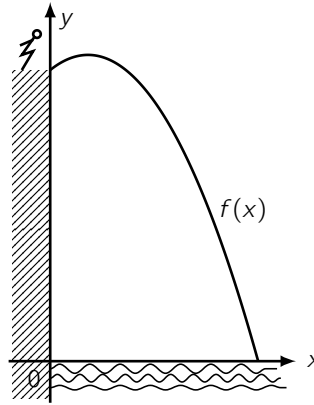
Le grand carré est de côté 1 mètre. Déterminer la largeur constante de la bande hachurée, sachant qu'elle a la même aire que le carré blanc intérieur.



Exercice 12

Un plongeur du haut d'une falaise est modélisé par une parabole qui, dans le repère ci-dessous, est la représentation graphique de la fonction $f(x)$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -0,2x^2 + 0,8x + 15,4$$



L'unité utilisée est le mètre.

$f(x)$ désigne ainsi la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètres.

1. Quelle est la hauteur de la falaise ?
2. À quelle distance de la falaise le plongeur touche-t-il la surface de l'eau ?
3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

Exercice 13

Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles 5 cm plus longues et 5 cm plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir la même surface du sol. Quelles sont les dimensions des premières dalles ?