

Guy DOTREMONT

Mathématique

Cinquième

UAA 2 Modèles de croissance

1.1 Construction d'un tableau de nombres à partir d'une formule

1.1.1 Activité – Distance de freinage (1)

Sur une route sèche et horizontale, la distance de freinage D (en mètres) d'une voiture, à partir du moment où le conducteur freine réellement, est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot c}$$

où

- * v est la vitesse au moment du freinage (en m/s) ;
 - * g est l'accélération de la pesanteur ($9,81m/s^2$) ;
 - * c est le coefficient de frottement qui dépend de la nature et de la qualité du revêtement.
- On supposera $c = 0,7$.

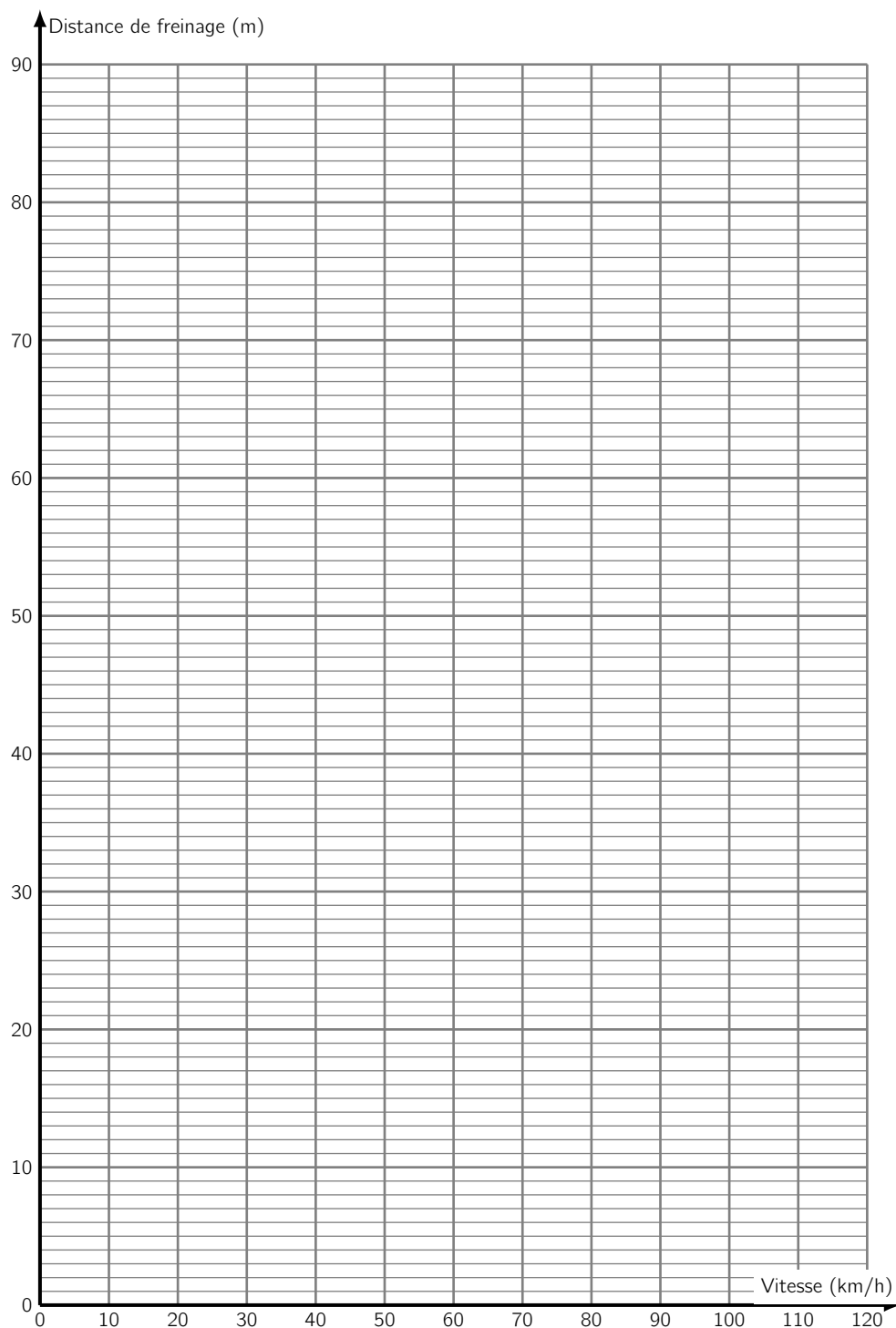
Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au centième près.

Vitesse (km/h)	20	30	50	70	90	120
Vitesse (m/s)						
Distance de freinage (m)						

1.2 Construction d'un graphe à partir d'un tableau de nombres

1.2.1 Activité – Distance de freinage (2)

Sur base du tableau déterminé ci-dessus, réaliser le graphe représentant la distance de freinage (en mètres) du véhicule en fonction de sa vitesse (en km/h).



1.3 Exercices

Exercice 1

Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous sur des feuilles séparées.

1. $f(x) = x^2 - 12x + 27$

2. $f(x) = x^2 + 3x - 4$

3. $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

4. $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$

5. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

6. $f(x) = -x^2 - 2x + 20$

7. $f(x) = x^2 - 4x - 5$

8. $f(x) = x^2 - 5x + 4$

9. $f(x) = (x - 3)^2 - 25$

10. $f(x) = (2 - x)^2 - 9$

Chapitre 2

Les fonctions de référence

Certaines des fonctions présentes dans ce cours le sont à titre de rappel.

2.1 Fonction constante

2.1.1 Définition

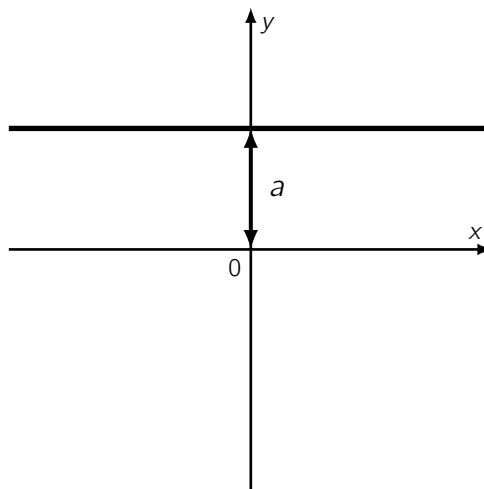
* Une fonction constante est de la forme

$$f(x) = a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

* dans la littérature, on retrouve plutôt la notation suivante :

$$f(x) = \text{constante} \quad \text{ou encore} \quad f(x) = c^{ste}$$

2.1.2 Représentation graphique



2.2 Fonction linéaire

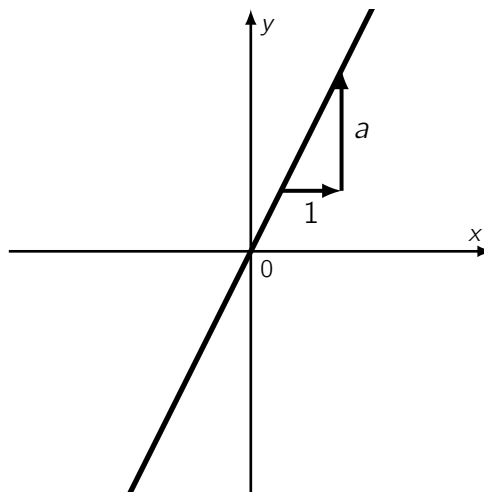
2.2.1 Définition

* Une fonction linéaire est de la forme

$$f(x) = ax \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

2.2.2 Représentation graphique

Dans la fonction $f(x) = ax$, le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou encore *coefficient directeur* de la droite.



2.3 Fonction affine

2.3.1 Définition

* Une fonction du premier degré (à coefficients réels) est de la forme

$$f(x) = ax + b \quad \text{où} \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

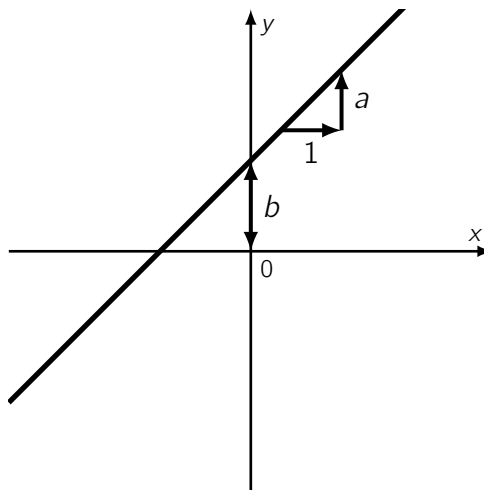
* Remarque : On retrouve assez souvent dans la littérature les notations suivantes :

$$f(x) = mx + p \quad \text{où} \quad m \text{ et } p \in \mathbb{R}, \text{ avec } m \neq 0$$

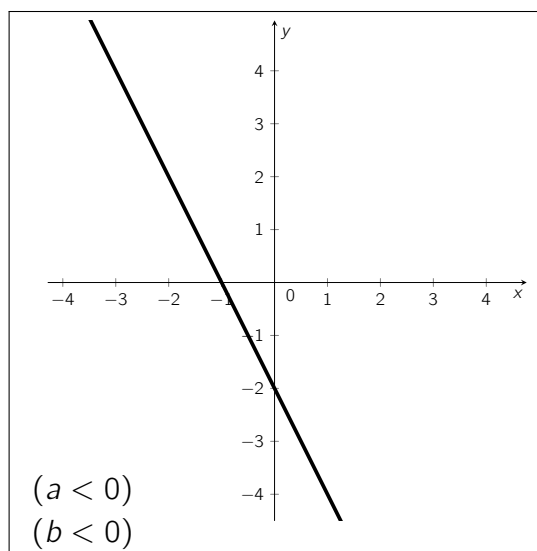
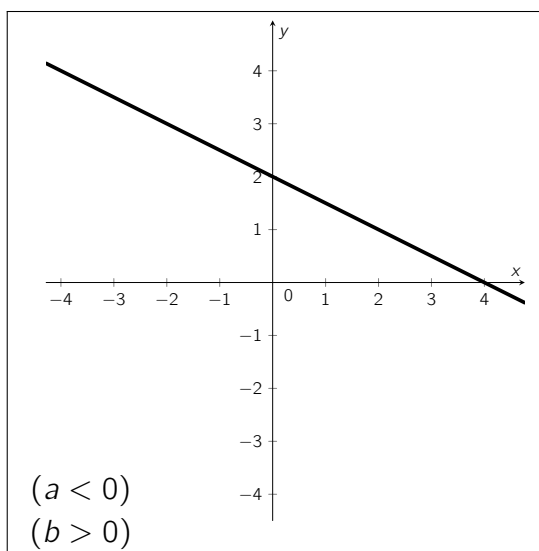
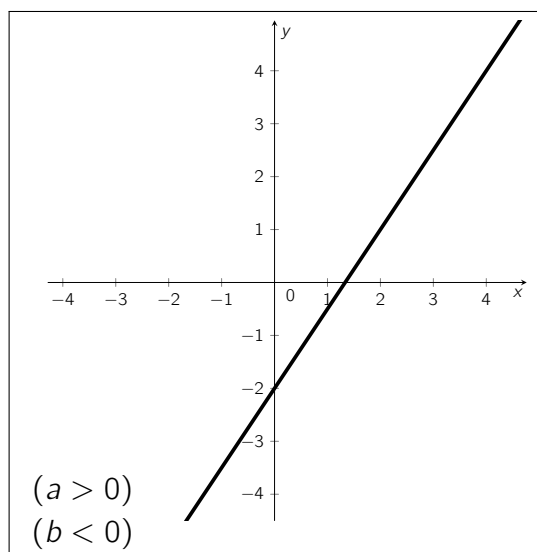
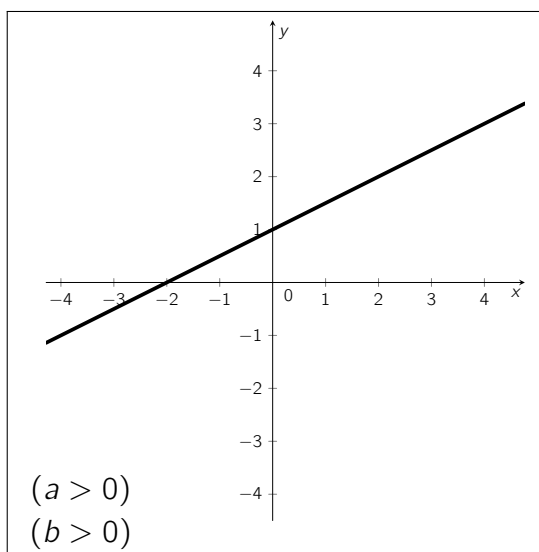
$$\text{ou encore } f(x) = kx + t \quad \text{où} \quad k \text{ et } t \in \mathbb{R}, \text{ avec } k \neq 0.$$

2.3.2 Représentation graphique

Dans la fonction $f(x) = ax + b$, le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou encore *coefficient directeur* de la droite. Le coefficient b est l'*ordonnée à l'origine* de la droite.



Quatre situations sont possibles :



2.4 La fonction de degré 2 : la parabole

2.4.1 Définition

- * La parabole est une fonction polynôme du second degré (à coefficients réels) et est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

- * Le *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, noté Δ , est le nombre défini par

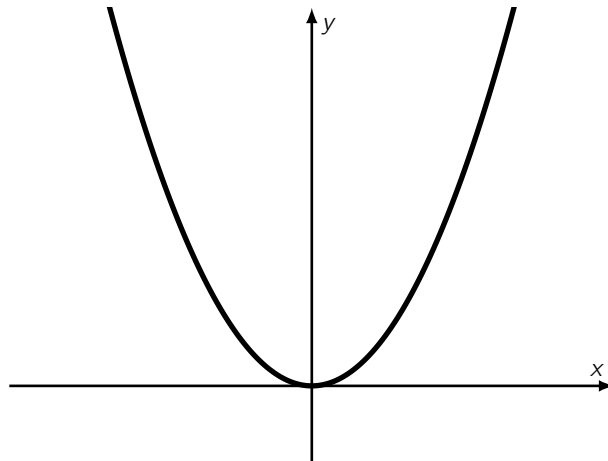
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Remarque : La *fonction polynôme du second degré* peut aussi être appelée *fonction trinôme du second degré*. Par commodité, nous l'appelons généralement *fonction du second degré*.

2.4.2 Représentation graphique

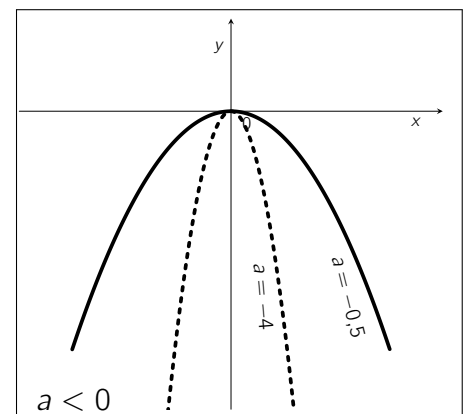
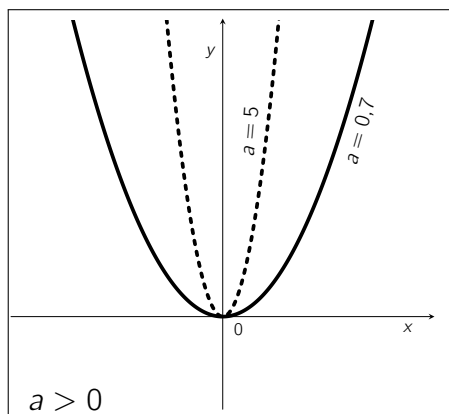
Voici l'allure générale de la fonction lorsque celle-ci est de la forme

$$f(x) = ax^2$$



Nous constatons que, dans ce cas particulier où la fonction s'écrit sous la forme $f(x) = ax^2$, la courbe possède l'axe des y comme axe de symétrie et l'origine du repère $(0; 0)$ comme sommet.

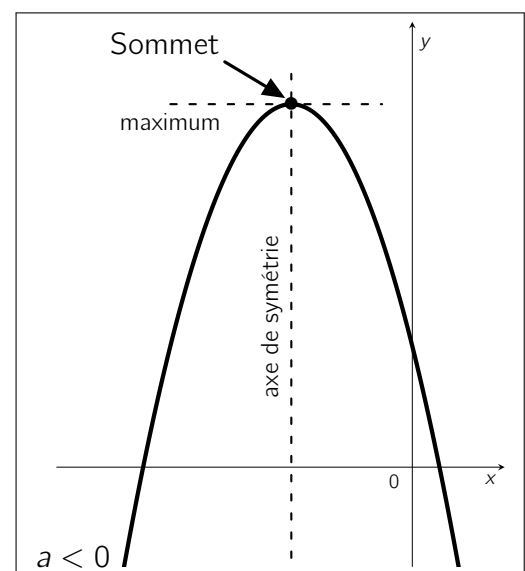
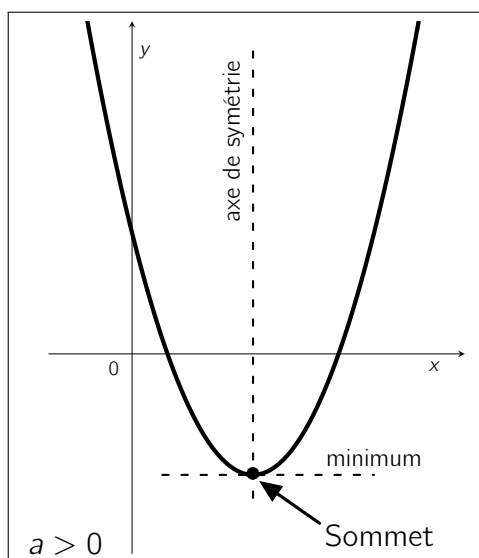
Si l'on modifie le coefficient a , comment la courbe évoluera-t-elle ?



On constate que plus le coefficient a est grand en valeur absolue, plus la courbe se rapproche de l'axe vertical. À l'inverse, plus le coefficient a est petit en valeur absolue, plus la courbe s'éloigne de l'axe vertical.

De manière plus générale, lorsque la fonction s'écrit sous la forme

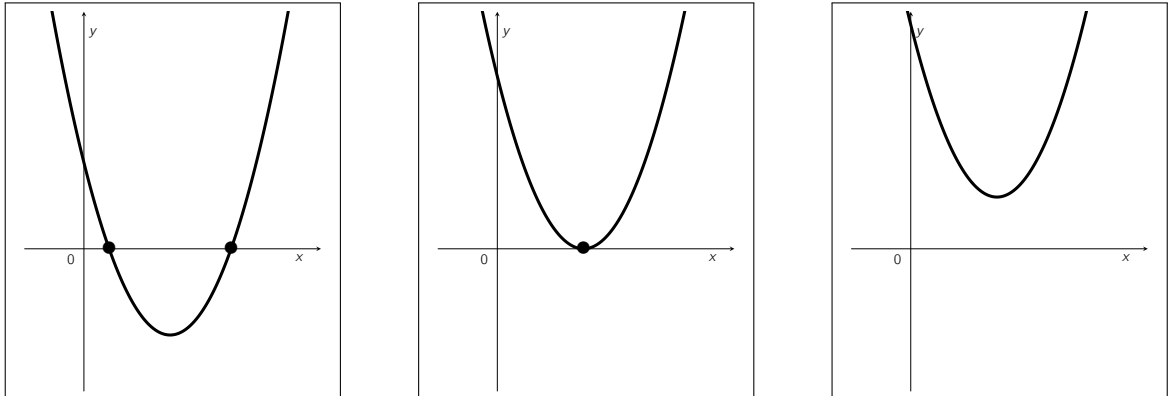
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



2.4.3 Résolution

Comme pour toute fonction, nous pouvons déterminer les zéros de la fonction parabole.

Il existe trois cas de figure ⁽¹⁾ :



Nous allons déterminer les coordonnées du/des points d'intersection entre la fonction et l'axe des x en résolvant l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (dans $\mathbb{R}$) ⁽²⁾. Afin de pouvoir résoudre cette équation, il faut distinguer les trois cas possibles (selon la valeur de Δ qui, je le rappelle, vaut $b^2 - 4ac$) :

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes, x_1 et x_2 , données par les formules ⁽³⁾ :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double, $x_1 = x_2$, généralement notée x_0 , donnée par la formule :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

(1). Les trois cas de figure valent ici pour $a > 0$ mais il existe également trois cas de figure pour $a < 0$.

(2). Nous utiliserons cette méthode dans la résolution des exercices qui se trouvent en fin de chapitre.

(3). Pour les plus curieux d'entre vous, la démonstration des formules se trouve, à titre d'information (donc à ne pas connaître), en page ??.

2.4.4 Applications

Antennes (radiotélescope & télévision par satellite)



Lancer de projectiles (rebond & fontaine)



Four solaire (industriel & personnel)



2.5 La fonction de degré 3

2.5.1 Définition

* Une équation du troisième degré (à coefficients réels) est une équation de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{où} \quad a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \neq 0.$$

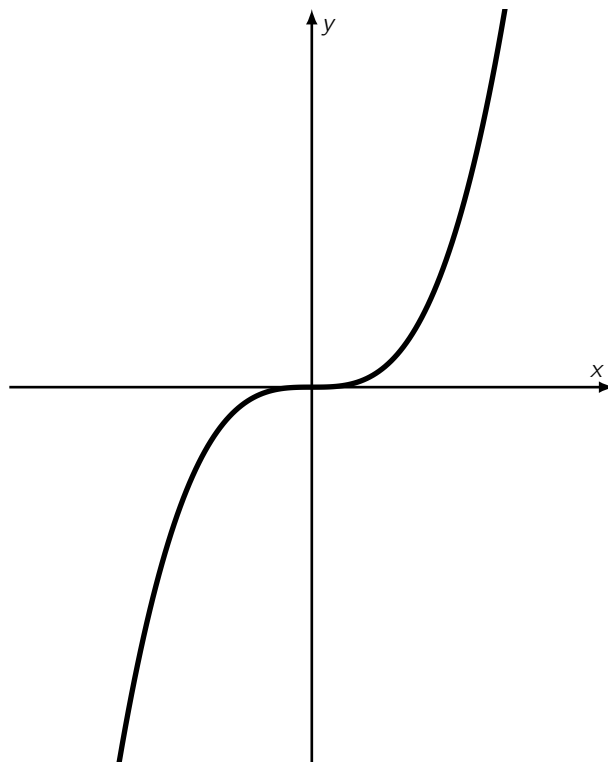
L'étude algébrique de la fonction du troisième degré est relativement complexe. Nous nous contenterons donc de son étude graphique tout en nous limitant à la fonction de base

$$f(x) = ax^3 \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

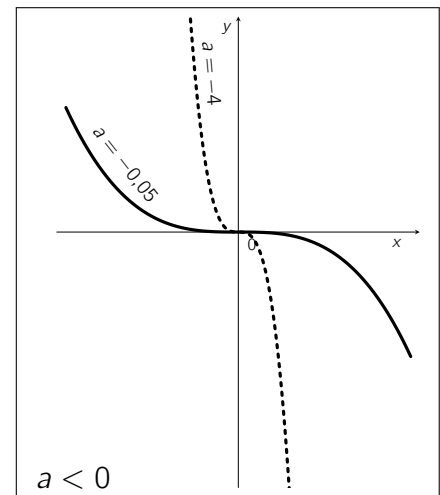
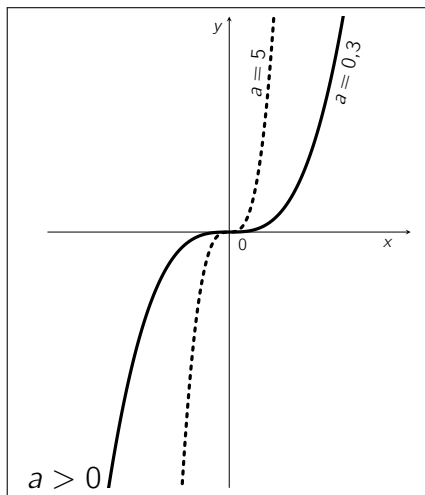
2.5.2 Représentation graphique

Voici l'allure générale de la *fonction cube* lorsque celle-ci est de la forme

$$f(x) = ax^3$$



Si l'on modifie le coefficient a , comment la courbe évoluera-t-elle ?



Les mêmes constatations peuvent être faites que pour la fonction de degré 2 : plus le coefficient a est grand en valeur absolue, plus la courbe se rapproche de l'axe vertical. À l'inverse, plus le coefficient a est petit en valeur absolue, plus la courbe s'éloigne de l'axe vertical.

2.6 La fonction inverse

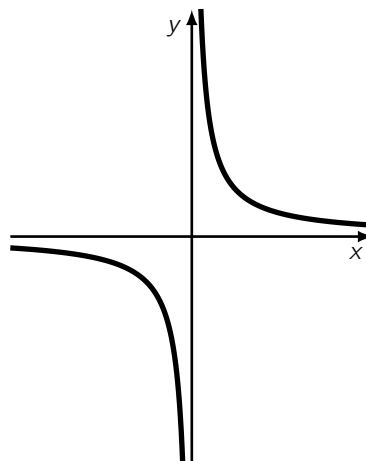
2.6.1 Définition

* La fonction inverse est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{où} \quad x \neq 0.$$

2.6.2 Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction inverse est une courbe que l'on appelle hyperbole.



2.7 La fonction racine carrée

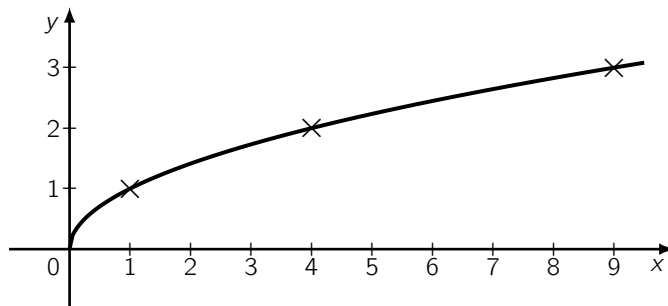
2.7.1 Définition

* La fonction racine carrée est une fonction de la forme

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{où} \quad x \geq 0.$$

2.7.2 Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une courbe que l'on représente comme suit :



2.8 La fonction puissance

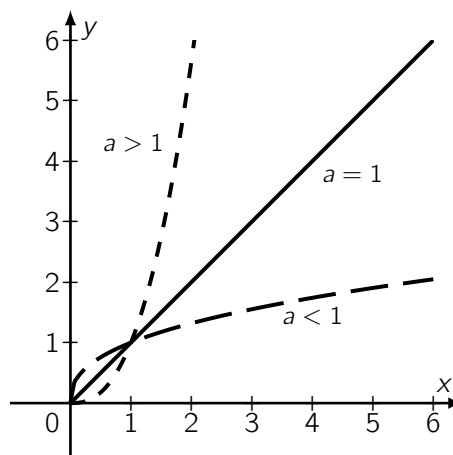
2.8.1 Définition

* La fonction puissance est une fonction de la forme

$$f(x) = x^a \quad \text{où} \quad a \geq 0.$$

2.8.2 Représentation graphique

Nous pourrions même dire qu'il n'existe non pas *une* fonction puissance mais des fonctions puissances. Le graphe suivant met bien cela en évidence.

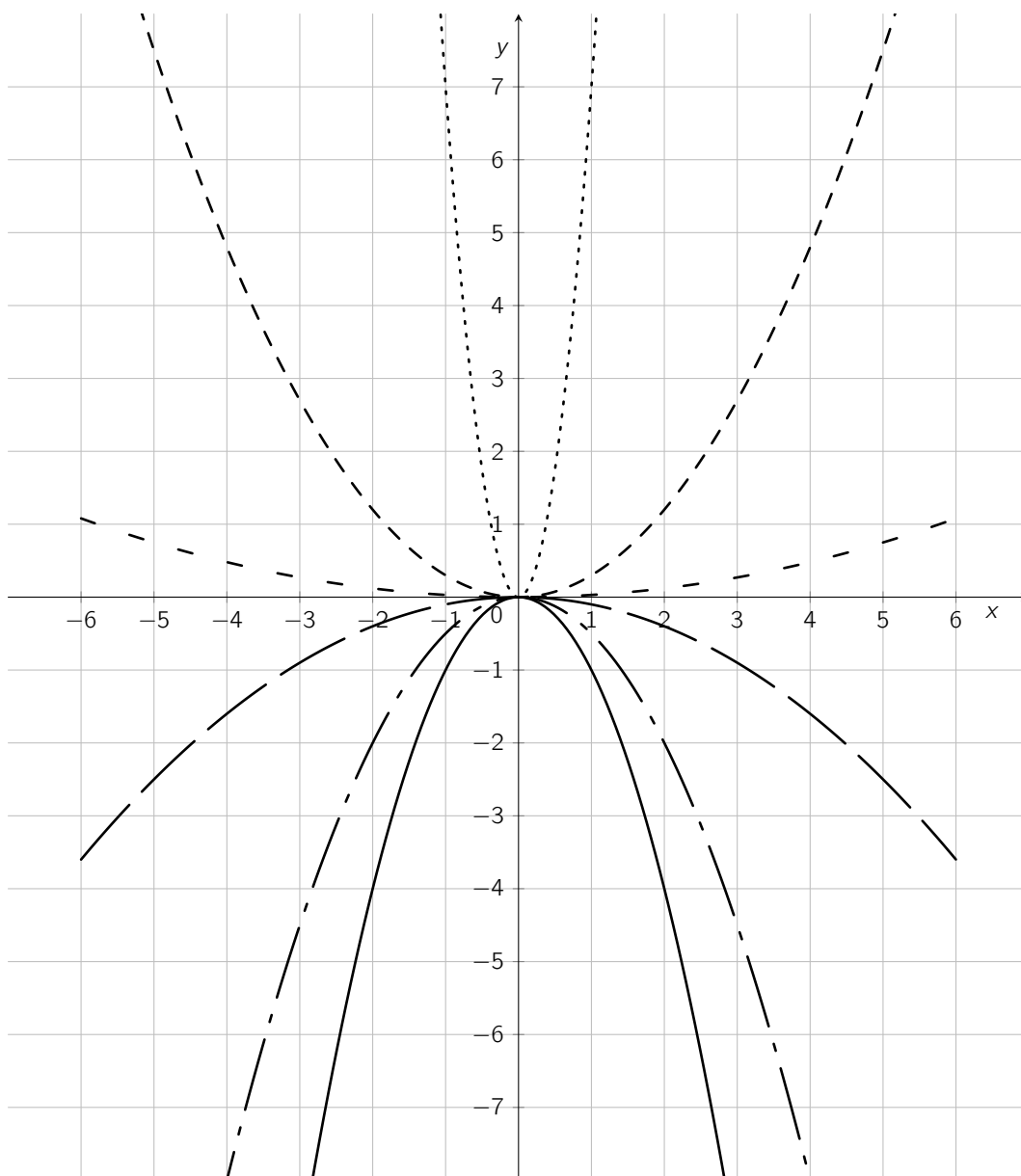


2.9 Exercices

Exercice 1

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^2$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.



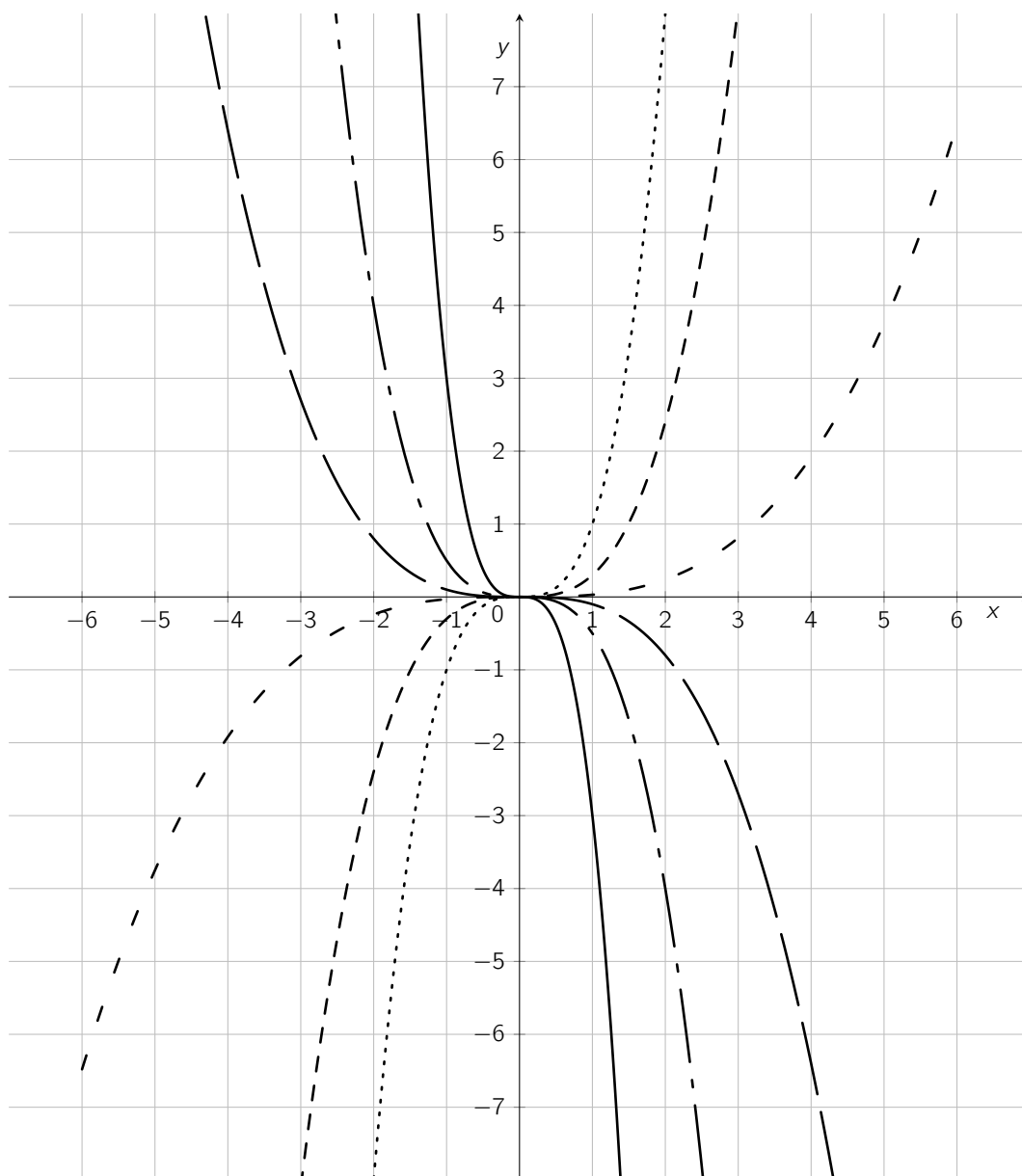
Les différentes valeurs de a sont :

-1 -0,5 7 0,03 -0,1 0,3

Exercice 2

Voici une série de courbes représentant les fonctions $f(x) = ax^3$ avec diverses valeurs de a .

Il est demandé d'écrire à côté de chaque courbe la valeur de a qui lui correspond.

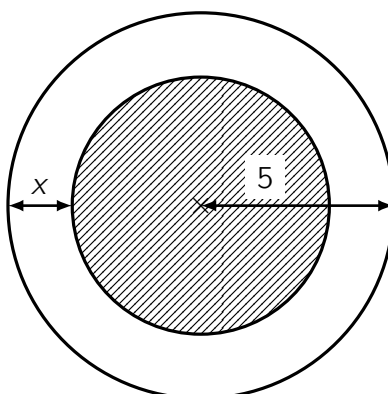


Les différentes valeurs de a sont :

1 -0,5 0,03 -0,1 0,3 -3

Exercice 3

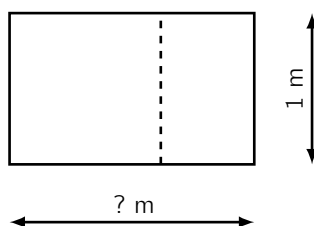
À l'intérieur d'un parterre circulaire dont le rayon vaut 5 mètres, on trace un sentier en forme de couronne.



1. Peut-on dire que l'aire du sentier est proportionnelle à sa largeur ? Écrire la formule qui justifiera la réponse.
2. Quelle doit être la largeur du sentier pour que son aire (aire blanche) soit égale à l'aire hachurée ?
3. Représenter graphiquement l'évolution des aires (blanche et hachurée) en fonction de x . Que constate-t-on ?

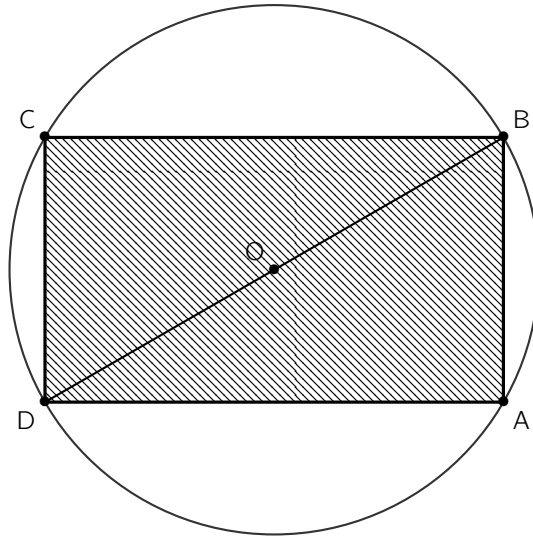
Exercice 4

On dit qu'un rectangle est un *rectangle d'or* si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier (préservation du rapport des côtés).



1. Déterminer la longueur d'un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 mètre.
2. Comment appelle-t-on ce nombre bien célèbre ?

Exercice 5



Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm inscrit dans un cercle de 13 cm de diamètre.

Exercice 6

Lors d'un feu d'artifice, chaque fusée explose quand elle atteint, au cours de sa trajectoire, sa hauteur maximale.

La trajectoire d'une fusée pyrotechnique peut être modélisée par la fonction suivante :

$$f(x) = -0,15x^2 + 5,7x$$

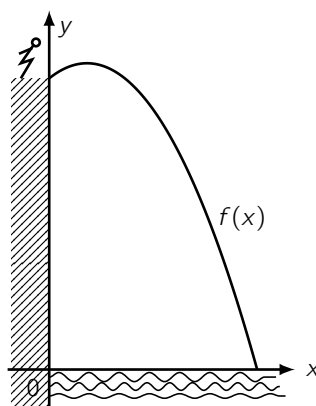
L'unité utilisée est le mètre.

1. Réaliser le graphe de la fonction ci-dessus ;
2. Déterminer graphiquement le maximum de la fonction $f(x)$ ainsi que son x_{max} correspondant ;
3. Vérifier par le calcul les résultats obtenus au point précédent ;
4. À quelle hauteur la fusée explose-t-elle ?

Exercice 7

Un plongeur du haut d'une falaise est modélisé par une parabole qui, dans le repère ci-dessous, est la représentation graphique de la fonction $f(x)$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -0,2x^2 + 0,8x + 15,4$$



L'unité utilisée est le mètre.

$f(x)$ désigne ainsi la hauteur, en mètres, du plongeur par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètres.

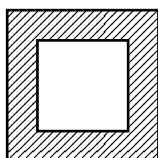
1. Quelle est la hauteur de la falaise ?
2. À quelle distance de la falaise le plongeur touche-t-il la surface de l'eau ?
3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

Exercice complémentaire 1

Un terrain rectangulaire de 26 mètres sur 30 mètres est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2 , quelle est sa largeur ?

Exercice complémentaire 2

Le grand carré est de côté 1 mètre. Déterminer la largeur constante de la bande hachurée, sachant qu'elle a la même aire que le carré blanc intérieur.

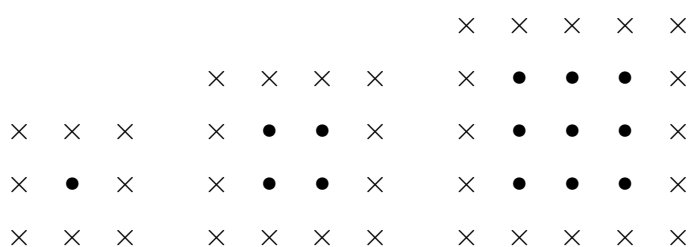


Exercice complémentaire 3

Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles 5 cm plus longues et 5 cm plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir la même surface du sol. Quelles sont les dimensions des premières dalles ?

Exercice complémentaire 4

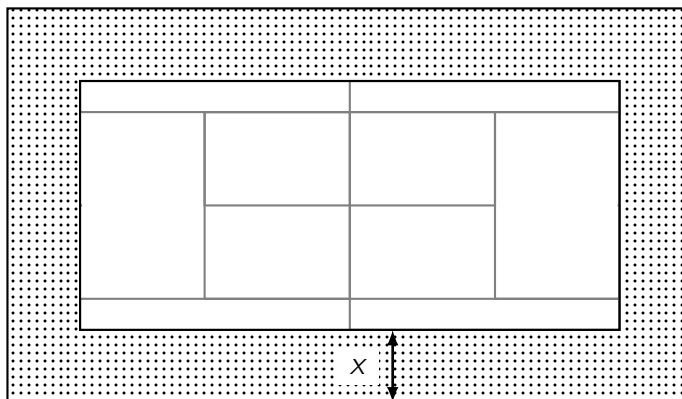
Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de les protéger contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Déterminer le nombre minimum de rangées (n) pour lequel il y a plus de pommiers ($\bullet$) que de conifères ($\times$).



Pour ce faire, répondre aux questions suivantes :

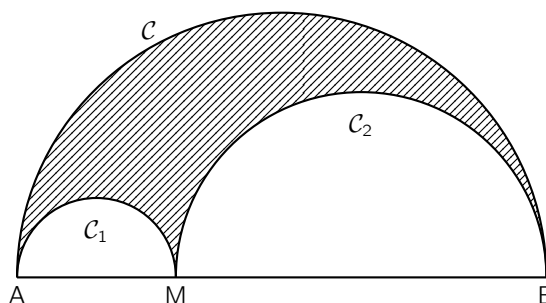
1. Réaliser un tableau comprenant 3 lignes : le nombre de rangées, le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Ce tableau permettra de répondre aisément aux deux questions suivantes.
2. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de pommiers ($\bullet$) ?
3. Quelle est la relation entre le nombre de rangées et le nombre de conifères ($\times$) ?
4. Calcule le nombre minimum de rangées de pommiers que le fermier doit planter pour avoir plus de pommiers que de conifères.

Exercice complémentaire 5



Voici un terrain de tennis standard dont les dimensions sont de 23,77 m de long pour 10,97 m de large. Je souhaite construire une zone pour les ramasseurs de balles, autour du terrain, de largeur constante x et dont l'aire est égale à celle du terrain. Calculer la largeur x de cette zone.

Exercice complémentaire 6



$[AB]$ est un segment, $AB=10$ cm.

$\mathcal{C}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. M est un point de $[AB]$.

$\mathcal{C}_1$ est le demi-cercle de diamètre $[AM]$. $\mathcal{C}_2$ est le demi-cercle de diamètre $[MB]$.

Le domaine colorié s'appelle un arbel.

On demande d'étudier les variations de l'aire de l'arbel lorsque M parcourt $[AB]$.

Indice : Déterminer la formule de l'aire de l'arbel en fonction de la distance AM (que l'on appellera x par facilité).