

Guy DOTREMONT

Mathématique

Sixième

UAA 4 Probabilité

Chapitre 1

Bref historique

Les archéologues ont montré que les jeux de hasard étaient déjà pratiqués dans de nombreuses sociétés antiques. Parmi les ancêtres des jeux de hasard, les jeux de dés occupent une place très importante.

Ceux-ci sont également à l'origine de certains mots actuels :

- * « hasard » vient de l'arabe « az-zahr » (dé à jouer) ;
- * « aléa » vient du latin « alea » (jeu de dés) ;
- * « chance » vient du latin « cadere » (tomber).

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme Cardan ⁽¹⁾. Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : « Comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? ».

Le même problème fut posé en 1654 à Blaise Pascal ⁽²⁾ par son ami le Chevalier de Méré ⁽³⁾ : « Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent. Mais comment doit-on répartir les mises ? »

C'est donc en cherchant à résoudre ces problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser ⁽⁴⁾. On savait aussi que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six.

Au XIX^e siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

(1). Jérôme Cardan (1501-1576) est un mathématicien, philosophe, astrologue, inventeur et médecin italien.

(2). Blaise Pascal (1623-1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.

(3). Antoine Gombaud, dit le « Chevalier de Méré » (1607-1684), est un écrivain français.

(4). Cf. chapitre suivant.

Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.

C'est Pierre-Simon de Laplace⁽⁵⁾ qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

Il fallut attendre le début du XX^e siècle pour lancer des fondements mathématiques solides à la théorie des probabilités avec Henri Poincaré⁽⁶⁾ mais surtout Kolmogorov⁽⁷⁾.

Aujourd'hui, la recherche en probabilité est très active et de nombreux résultats sont publiés chaque année. L'utilisation des outils probabilistes et statistiques dans un grand nombre de domaines tels que la génétique, la psychologie, la médecine, la physique des particules, l'économie, les assurances,... témoigne de l'efficacité et de l'importance de ces disciplines.

(5). Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

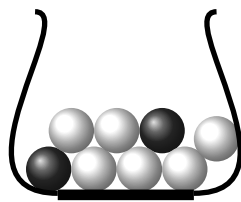
(6). Henri Poincaré (1854-1912) est un mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences français.

(7). Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987) est un mathématicien russe et soviétique qui a apporté des contributions significatives en mathématiques, notamment en théorie des probabilités.

Chapitre 2

Préambules

Prenons une urne dans laquelle nous y avons placé 6 billes blanches et 2 billes noires ⁽¹⁾.



Si je tire une bille au hasard de l'urne, trois raisonnements possibles, mais pas nécessairement corrects, existent afin d'en déterminer des probabilités.

- * **Raisonnement 1** : Il y a deux possibilités (bille blanche ou bille noire), j'ai donc une chance sur deux que la bille soit blanche et une chance sur deux également qu'elle soit noire. Ce raisonnement est faux car il y a plus de billes blanches que de billes noires ; on n'a donc pas les mêmes chances.
- * **Raisonnement 2** : J'ai une chance sur six de tirer une bille blanche (car il y en a 6) et une chance sur deux de tirer une bille noire (car il y en a 2). Les probabilités sont donc de $1/6$ pour « bille blanche » et $1/2$ pour « bille noire ». Ce raisonnement est également faux car $1/6 = 0,17$ et $1/2 = 0,5$; la probabilité de tirer une bille blanche serait inférieure à celle de tirer une bille noire. Bizarre !
- * **Raisonnement 3** : Il y a six billes blanches dans l'urne, donc six chances que la bille tirée soit blanche. La probabilité d'obtenir une bille blanche est donc de 6. De même, comme il y a deux billes noires dans l'urne, il y a donc deux chances que la bille tirée soit noire. La probabilité d'obtenir une bille noire est donc de 2.

Ce raisonnement est correct mais incomplet ; il faut relativiser les chances en tenant compte du nombre total de billes présentes dans l'urne. On le comprend aisément... De plus, nous verrons d'ici peu qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, donc 6 et 2 ne sont pas des probabilités.

(1). Idée inspirée de *Maths 3^e – Prépa brevet Cours & entraînement : Cours, méthodes et exercices brevet*, Josep Cesaro, C.M. Chiocca, Jean-Pierre Gerbal, Noël Laverny, Catherine Schuwer, René Veillet, Éditions Hatier, Paris, Mai 2012.

2.1 Exemple – Dé à 6 faces

Partons d'un exemple pour introduire la notion de probabilité : le dé à six faces. On lance vingt fois un dé en notant chaque fois les points figurant sur la face supérieure.

3	3	2	5	1	6	5	1	4	6
6	5	6	1	5	2	3	5	4	1

À partir de maintenant on va s'intéresser à la valeur « 5 » (on aurait pu choisir un autre nombre), et on en réalise un premier tableau recensé.

Dans ce tableau y seront indiqués le numéro du lancer, le nombre de fois que la valeur « 5 » est apparue depuis le début de l'expérience ainsi que sa fréquence.

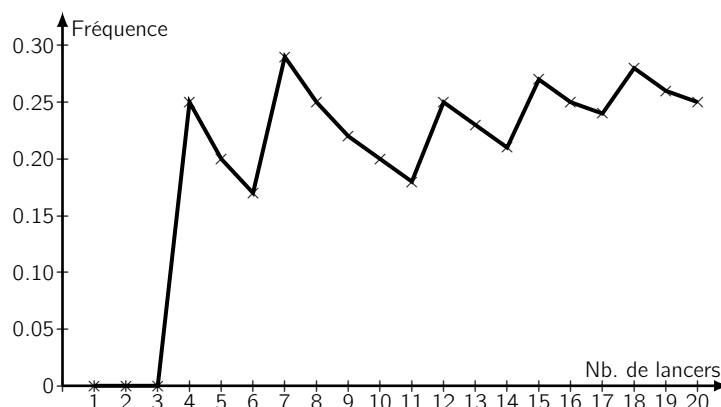
Celle-ci est calculée en faisant le rapport entre le nombre de fois que la valeur « 5 » est apparu et le nombre de lancers.

Tableau recensé :

Nb. de lancers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb. de 5	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
Fréquence	0	0	0	0.25	0.2	0.17	0.29	0.25	0.22	0.2

Nb. de lancers	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nb. de 5	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
Fréquence	0.18	0.25	0.23	0.21	0.27	0.25	0.24	0.28	0.26	0.25

On réalise le graphe des fréquences correspondant :

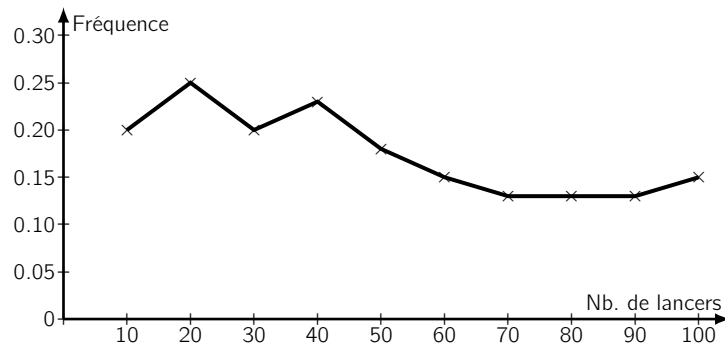


Il existe de très grandes variations au niveau de la fréquence. Est-ce normal ? Poursuivons l'expérience pour le savoir...

On lance à nouveau le dé 80 fois (pourquoi ?) et on en réalise un deuxième tableau :

Nb. lancers	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Nb. de 5	2	5	6	9	9	9	9	10	12	15
Fréquence	0.2	0.25	0.2	0.23	0.18	0.15	0.13	0.13	0.13	0.15

On réalise à nouveau le graphe des fréquences correspondant :



Les constatations que l'on en tire nous amènent à poursuivre l'expérience.

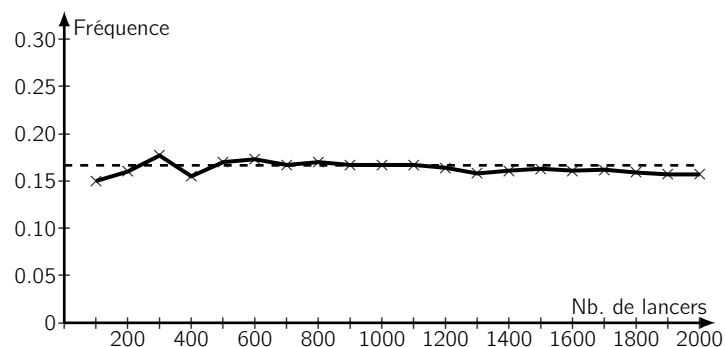
On relance donc le dé (1900 fois, cette fois-ci) et on en réalise un dernier tableau :

Nb. lancers	100	200	300	400	500	600	700
Nb. de 5	15	32	53	62	85	104	117
Fréquence	0.15	0.16	0.177	0.155	0.17	0.173	0.167

Nb. lancers	800	900	1000	1100	1200	1300	1400
Nb. de 5	136	150	167	184	197	205	226
Fréquence	0.17	0.167	0.167	0.167	0.164	0.158	0.161

Nb. lancers	1500	1600	1700	1800	1900	2000	—
Nb. de 5	244	258	275	286	298	314	—
Fréquence	0.163	0.161	0.162	0.159	0.157	0.157	—

On réalise un dernier graphe des fréquences correspondant :



2.2 Conclusion

Lorsque le nombre de lancers devient grand, on observe une stabilisation de la fréquence autour de $0,16666\dots$ ($= 1/6$). Ce nombre est appelé *probabilité d'obtenir un « 5 »*.

2.3 Remarques importantes

1. La **fréquence** est une notion de statistique descriptive. Elle décrit les résultats expérimentaux une fois l'expérience réalisée.
2. La **probabilité** est une notion théorique. Elle permet, avant de réaliser l'expérience, d'avoir une idée du nombre de chances qu'un événement bien déterminé se produise.

Une fois de plus, afin de comprendre plus aisément la suite de ce cours, il est important de connaître un certain nombre de termes, de notions.

3.1 Expérience aléatoire

Commençons par l'**expérience aléatoire**. Il s'agit d'une expérience dont on ne peut pas prédire exactement le résultat, du fait que l'on ne contrôle pas entièrement toutes les causes qui influencent ce résultat.

3.1.1 Exemples

1. On lance une fois un dé et on note le point obtenu.
2. On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie.
3. On joue deux fois à pile ou face avec la même pièce en notant les résultats obtenus.
4. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

3.2 Ensemble fondamental

Autre notion importante : l'**ensemble fondamental**. On appelle ensemble fondamental l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est généralement noté Ω (oméga).

3.2.1 Exemples

Se référant aux exemples ci-dessus :

$$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\Omega_2 = \{P; F\}$$

$$\Omega_3 = \{(P; P); (P; F); (F; P); (F; F)\} \text{ ou } \Omega_3 = \{PP; PF; FP; FF\}$$

$$\Omega_4 = \{(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\heartsuit;$$

$$(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\diamondsuit;$$

$$(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\clubsuit;$$

$$(A; R; D; V; 10; 9; 8; 7)\spadesuit\}$$

3.3 Événement aléatoire

On en arrive à définir ce qu'est un **événement aléatoire**. Un événement aléatoire est une partie de l'ensemble fondamental.

3.3.1 Exemples

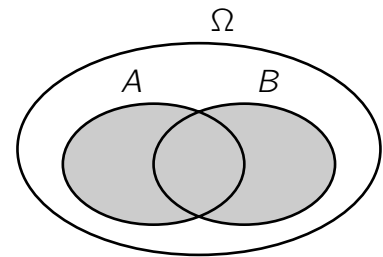
- * Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 est un événement noté, par exemple, A :
 $A = \{5; 6\}$
- * Obtenir deux fois « pile » quand on lance trois fois une pièce de monnaie est un événement J , par exemple : $J = \{PPF; PFP; FPP\}$
- * Tirer un as est un événement qui correspond, par exemple, à l'ensemble F : $F = \{A\heartsuit; A\diamondsuit; A\clubsuit; A\spadesuit\}$

3.3.2 En particulier

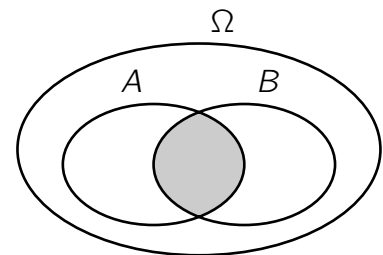
- * La partie $\emptyset$ est appelée **événement impossible**.
- * La partie constituée de Ω entier est appelé **événement certain**.
- * Toute partie constituée d'un seul résultat est appelé **événement élémentaire**.

De plus, on peut combiner des événements pour former de nouveaux événements. Ainsi, si A et B sont deux événements aléatoires :

- $A \cup B$ se produit si et seulement si
 - * l'événement A se produit
 - * **ou** l'événement B se produit
 - * **ou** les événements A et B se produisent

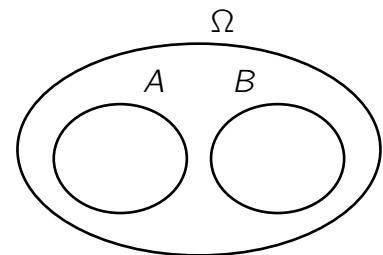


- $A \cap B$ se produit si et seulement si
 - * l'événement A se produit
 - * **et** l'événement B se produit

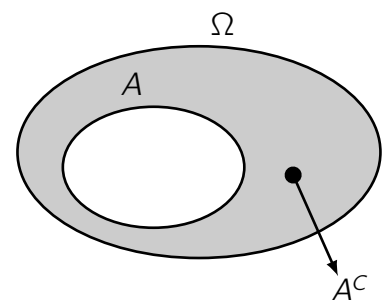


3.3.3 Remarques importantes

- Les événements A et B sont incompatibles
si A et B sont disjoints



- A^C se produit si et seulement si
l'événement A ne se produit pas



3.4 Notion de cardinalité

3.4.1 Définition

Un nombre cardinal désigne une quantité. À l'inverse, un nombre ordinal désigne plutôt un ordre, un « rangement ».

Pour un ensemble fini⁽¹⁾, sa cardinalité, qui est une notion intuitive de taille, va indiquer le nombre d'éléments appartenant à cet ensemble. Ce nombre appartient à $\mathbb{N}$.

3.4.2 Exemples

Pour l'ensemble...	Son cardinal est...
$\{4; 9; 11\}$	3
$\{7; 11; 13; 17; 19\}$	5
$\{4; 2; 6; 1\}$	4
$\{(4; 2); (6; 1)\}$	2
$\{\}$ ou $\emptyset$	0

3.4.3 Notation

Dans la littérature, nous pourrions trouver différentes manières de noter le « cardinal » d'un ensemble :

$$\text{Card}(E) = \#E = |E| = \overline{E} = \overline{\overline{E}}$$

Dans la suite du cours, nous utiliserons la notation $\#$ qui semble un bon compromis entre concision d'écriture et clarté du propos.

Ainsi, si l'ensemble B contient les 3 éléments 2, 4 et 7, on notera :

$$B = \{2; 4; 7\} \quad \text{et} \quad \#B = 3$$

(1). Un ensemble A est dit *fini* si l'on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que A contienne exactement n éléments. Dans le cas contraire, l'ensemble est dit *infini*.

3.5 Exercices

Exercice 1

On jette une fois un dé non truqué et on note le point figurant sur la face supérieure.

1. Déterminer l'ensemble fondamental de l'expérience et déterminer $\#\Omega$ ($\#\Omega$ correspond au nombre d'éléments de Ω).
2. Déterminer tous les événements élémentaires, notés $E_1, E_2, \dots$
3. Soient A, B et C les événements suivants :
 A : « obtenir un nombre pair »
 B : « obtenir un nombre impair »
 C : « obtenir un nombre premier »
 - Décrire A, B et C sous forme d'ensemble.
4. Décrire par une phrase $B \cap C, C^c, A \cap B$ et $A \cup C$
5. Décrire par un ensemble $B \cap C, C^c, A \cap B$ et $A \cup C$
6. Lesquels de ces ensembles sont disjoints ? Que peut-on en conclure à propos des événements correspondants ?

Exercice 2

On jette deux dés non truqués et on note les points figurant sur leur face supérieure.

1. Décrire Ω et déterminer $\#\Omega$.
2. Déterminer tous les événements élémentaires, notés $E_1, E_2, \dots$
3. Soient A et B les événements correspondant respectivement à l'apparition de deux points identiques et à l'apparition de deux points dont le point maximum est un 3.
 - Décrire les ensembles $A, B, A \cap B$ et $A \cup B$
 - Déterminer $\#A, \#B, \#(A \cap B)$ et $\#(A \cup B)$

Exercice 3

On tire une carte d'un jeu bien mélangé de 52 cartes.

1. Décrire Ω et déterminer $\#\Omega$.
2. Déterminer tous les événements élémentaires, notés $E_1, E_2, \dots$
3. Soient A et B les événements suivants :
 A : « obtenir une dame »
 B : « obtenir un coeur »
 - Décrire par une phrase les événements $A^C, B^C, A \cap B, A \cup B$ et $A \cap B^C$
 - Déterminer $\#A, \#B, \#A^C, \#B^C, \#(A \cap B), \#(A \cup B)$ et $\#(A \cap B^C)$
4. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier la réponse.
5. Déterminer un événement C incompatible avec l'événement B .

Définitions et propriétés de la probabilité

4.1 Première définition

On considère une expérience aléatoire que l'on peut répéter autant de fois que l'on veut et on s'intéresse alors à la fréquence d'un certain événement A . On admet aisément, comme il a été vu dans l'introduction (Cf. p.7), que lorsque le nombre de répétitions de l'expérience devient très grand, les fluctuations de la fréquence deviennent très petites.

On obtient finalement une stabilisation de la fréquence : il y a une tendance de plus en plus nette pour la fréquence à ne plus guère s'écarter d'une certaine valeur.

Cette valeur sera appelée *probabilité de l'événement aléatoire A* .

Il est évident que cette définition est difficile à utiliser, puisqu'il faut réaliser un très grand nombre de fois une expérience avant de pouvoir déterminer une probabilité...

Envisageons donc une autre définition.

4.2 Seconde définition

4.2.1 Axiomes de Kolmogorov

En 1933, Andreï Kolmogorov ⁽¹⁾ définit la probabilité comme étant une fonction réelle de l'ensemble des événements dans $\mathbb{R}$ et qui obéit à trois axiomes ⁽²⁾ :

1. $\forall$ événement A , on a $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si A et B sont deux événements disjoints,
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4.2.2 Propriétés

Se basant sur ces axiomes, on en déduit aisément quelques propriétés :

1. $\forall$ événement A , on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $\forall$ événement A , on a bien évidemment que :
 $A \cup A^c = \Omega$ et $A \cap A^c = \emptyset$
$$\Rightarrow P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$
$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$
$$1 = P(A) + P(A^c)$$
$$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $\forall$ événement A composé des événements
élémentaires $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, on a :
$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n)$$

(1). Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987) est un mathématicien russe et soviétique qui a apporté des contributions significatives en mathématiques, notamment en théorie des probabilités.

(2). Axiome : Proposition considérée comme évidente, admise sans démonstration (dictionnaire Le Robert).

4.3 Exercices

Exercice 1

Trois chevaux A, B et C prennent le départ d'une course.

Le cheval A a deux fois plus de chance de gagner que le B et le B a deux fois plus de chance que le C.

Quelles sont les probabilités de gagner pour chacun ?

Exercice 2

Quatre personnes A, B, C et D organisent un jeu entre elles où il n'y a qu'un gagnant possible.

Sachant que

A a quatre fois plus de chance de gagner que C

B a trois fois plus de chance de gagner que C

D a la même chance de gagner que B,

quelle est la probabilité que D ne gagne pas ?

Exercice 3

Un groupe de 7 amis (3 garçons et 4 filles) décide de participer aux « 20 km de Bruxelles ». Par facilité, on les notera A, B et C pour les garçons et D, E, F et G pour les filles.

Sachant que

A a trois fois plus de chance de gagner que C

F a quatre fois plus de chance de gagner que C

E a quatre fois plus de chance de gagner que F

D n'a que deux chances sur trois de gagner par rapport à A

G n'a qu'une chance sur deux de gagner par rapport à B

B n'a que deux chances sur cinq de gagner par rapport à A,

quelle est la probabilité, pour chacun des garçons, de gagner ?

5.1 Définition

L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se produire.

5.1.1 Exemple – Lancer une pièce de monnaie

Il y a deux événements élémentaires : $\{P\}$ et $\{F\}$.

Si l'on suppose que la pièce utilisée n'est pas truquée, ces deux événements élémentaires sont équiprobables : $P(\{P\}) = P(\{F\})$

En utilisant les axiomes de Kolmogorov (seconde définition), on obtient alors le résultat attendu intuitivement :

$$P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}$$

5.1.2 Exemple – Lancer un dé à 6 faces

Les événements élémentaires sont : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.

Si le dé n'est pas truqué, ces événements élémentaires sont équiprobables. En utilisant la même démarche que ci-dessus, on obtient :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Soit F l'événement « obtenir un nombre pair » : $F = \{2; 4; 6\}$

alors,

$$P(F) = P(2; 4; 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{\text{nb. d'éléments de } F}{\text{nb. d'éléments de } \Omega}$$

5.2 Formule de Laplace

En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque F , notée $P(F)$, est

$$P(F) = \frac{\text{nb. d'éléments de } F}{\text{nb. d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nb. de cas favorables}}{\text{nb. de cas possibles}}$$

Cette formule ⁽¹⁾ peut s'écrire plus simplement :

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega}$$

(1). Cette formule est attribuée au mathématicien français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

5.3 Exercices à résoudre par dénombrement

Exercice 1

Dans un jeu télévisé, les participants doivent tirer une boule d'une urne. Cette urne contient dix-sept boules blanches et trois boules noires. Déterminer, lors du premier tirage, la probabilité qu'a un candidat de tirer une boule noire.

Exercice 2

Une urne contient sept boules : une blanche, quatre rouges et deux jaunes. On tire une boule de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « la boule tirée est rouge »

B : « la boule tirée est jaune »

C : « la boule tirée est blanche ou rouge »

Exercice 3

On lance un dé non truqué. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « le point obtenu est supérieur à 2 »

B : « le point obtenu est un multiple de 3 »

Exercice 4

Dans un jeu de 32 cartes, bien mélangé, on tire une carte. Les événements sont :

A : « la carte est un pique »

B : « la carte est une figure ^a »

- Définir par une phrase A^C , $A \cap B$ et $A \cup B$.
- Puis calculer $P(A)$, $P(A^C)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

a. Dans un jeu de carte traditionnel, il existe trois figures : Roi, Dame et Valet

Exercice 5

On jette deux dés non truqués et on note le couple de points obtenus.
Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : « les deux points sont identiques »
- B : « le résultat comporte exactement un 3 »
- C : « le résultat ne comporte aucun 6 »
- D : « la somme des points vaut 10 »
- E : « le résultat comporte un 6 ou un 5 »

Exercice 6

On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées et on note, dans l'ordre, la succession de « pile P » et de « face F » obtenue. Calculer la probabilité d'obtenir :

- * exactement trois P
- * exactement deux F
- * des résultats alternés
- * au moins un P

5.4 Exercices à résoudre à l'aide d'un diagramme de Venn

Exercice 1

Dans un restaurant, on a constaté que sur 160 clients, pour terminer le repas, 136 clients prennent un dessert, 40 prennent du fromage et 32 prennent à la fois du fromage et un dessert.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. En choisissant un client au hasard, quelle est la probabilité
 - * qu'il ne choisisse ni dessert, ni fromage ?
 - * qu'il choisisse du fromage, mais pas de dessert ?
 - * qu'il choisisse un dessert ou du fromage ou les deux ?

Exercice 2

Dans un lot de 1 100 appareils, on a constaté que 132 appareils présentaient le défaut x (et peut-être aussi le défaut y), 99 appareils présentaient le défaut y (et peut-être aussi le défaut x), et 44 présentaient simultanément les deux défauts.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. On choisit au hasard un appareil parmi les 1 100. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - E : « l'appareil choisi a le défaut x »
 - F : « l'appareil choisi a le défaut y »
 - G : « l'appareil choisi a les deux défauts »
 - H : « l'appareil choisi a uniquement le défaut y »
 - I : « l'appareil choisi a le défaut x ou y »
 - J : « l'appareil choisi n'a pas de défaut »
 - K : « l'appareil choisi n'a pas le défaut y »

Exercice 3

Parmi les 115 personnes faisant partie d'une association sportive, 60 font partie de la section base-ball, 45 font partie de la section équitation et 25 font partie des deux sections.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. On choisit au hasard une personne parmi les 115. Calculer la probabilité que cette personne ne fasse ni du base-ball, ni de l'équitation.

5.5 Exercices à résoudre à l'aide d'un tableau à double entrée

Exercice 1

Une classe comporte 8 garçons parmi lesquels 6 n'ont pas les yeux bleus et 15 filles dont les deux tiers ont les yeux bleus.

1. Représenter cette situation par un tableau à double entrée : sexe, couleur des yeux.
2. On choisit un élève au hasard dans la classe. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « l'élève choisi est un garçon »

B : « l'élève choisi est une fille aux yeux bleus »

C : « l'élève choisi est un garçon qui n'a pas les yeux bleus »

D : « l'élève choisi a les yeux bleus »

Exercice 2

Un sac contient 65 jetons ayant chacun l'une des trois couleurs, rouge, verte ou jaune, et une forme carrée ou bien ronde. On sait que 30 de ces jetons sont jaunes, 40 jetons sont ronds, 11 jetons sont rouges et ronds, 10 jetons sont verts et carrés, 7 jetons sont verts et ronds.

1. Représenter cette situation par un tableau à double entrée : couleur, forme.
2. On choisit un jeton au hasard dans le sac. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le jeton choisi est vert »

B : « le jeton choisi est rond mais pas vert »

C : « le jeton choisi n'est ni rond, ni vert »

Remarque : Chaque probabilité sera donnée sous forme de fraction, puis sous forme décimale arrondie au 100^e.

Exercice 3

Un lycée de 930 élèves regroupe deux types de sections : des sections générales et des sections technologiques.

- 30 % des élèves de l'établissement sont en section technologique ;
- 40 % des élèves de l'établissement sont des garçons ;
- 25 % des élèves garçons sont en section technologique.

1. Présenter les données dans un tableau à double entrée.
2. On interroge au hasard un élève de l'établissement. Tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « cet élève est une fille »

B : « cet élève est un garçon d'une section technologique »

C : « cet élève n'est pas une fille et n'est pas dans une section technologique »

Exercice 4

Dans un village, 1750 habitants sont conviés à répondre à une enquête sur le placement d'une antenne-relais. Quatre-vingts pourcent des habitants ont participé au référendum. Il leur était demandé s'ils étaient *pour* ou *contre* la pose de l'antenne sur le toit de l'école.

- 11 % des habitants sont *contre* ;
- parmi les *contre*, 125 sont situés à 2 km ou moins du site ;
- 90 % des habitants ayant participé sont situés à plus de 2 km du site.

1. Présenter les données dans un tableau à double entrée (avis/distance).
2. On interroge au hasard un habitant à la sortie du référendum. Calculer la probabilité qu'il soit *pour* et qu'il habite à plus de 2 km du site.

Chapitre 6

Arbres et probabilité conditionnelle

Dans de multiples situations, il est possible de schématiser une expérience aléatoire par un arbre (simple). Dans le cas de la schématisation par un arbre de probabilité, on parlera d'arbre pondéré. L'utilisation de la représentation en arbre permet de modéliser une situation comme nous venons de le dire, mais permet également de déterminer une probabilité dans le cas où l'on étudie plusieurs événements.

Si l'arbre n'est pas pondéré, les événements décrits par une branche sont équiprobables. À l'inverse, s'il existe une pondération, leur probabilité est égale au produit des branches.

Voici deux exemples⁽¹⁾ de situations que l'on peut rencontrer :

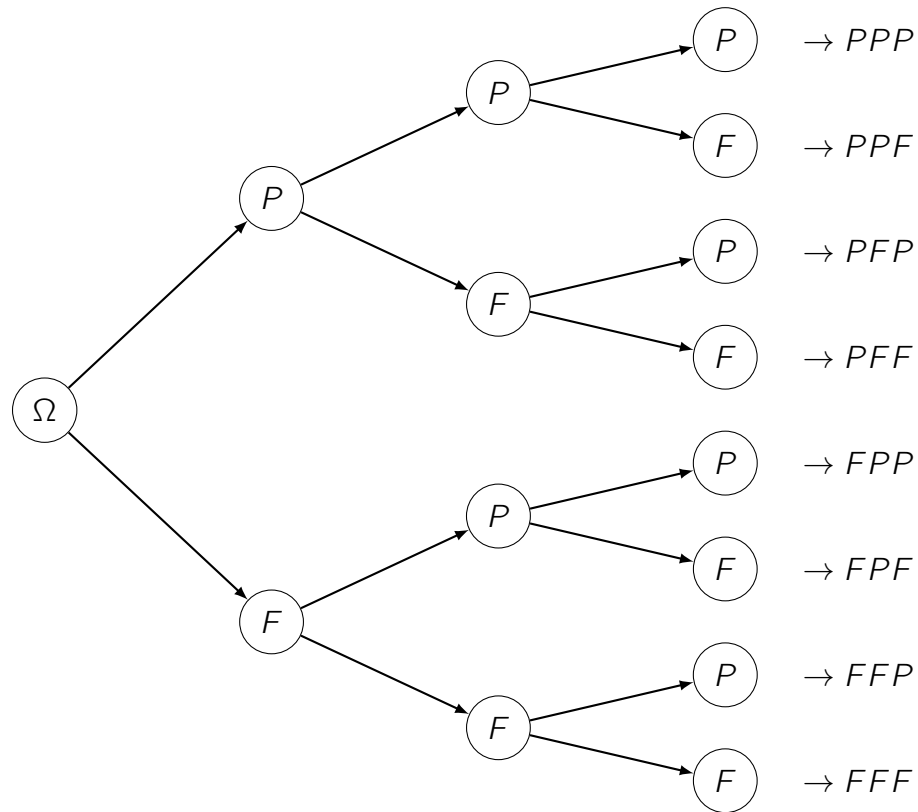
- * Un tiers d'une population est vaccinée contre une maladie. On sait que 10 % des personnes vaccinées développent quand même la maladie.
On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité pour que celle-ci soit malade et vaccinée ?
- * Un étudiant a une probabilité de $\frac{3}{4}$ d'être présent à la prochaine séance si celle-ci est un cours magistral, et une probabilité de $\frac{9}{10}$ si celle-ci est une séance de travaux dirigés.
Sachant que son emploi du temps est constitué aux deux tiers de cours magistraux, quelle est la probabilité qu'il soit présent à la prochaine séance ?

(1). Extrait du cours de JF Coeurjolly, *Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles – Indépendance* (Université Pierre Mendès France, Grenoble, France) https://www-ljk.imag.fr/membres/Jean-Francois.Coeurjolly/documents/L2/CM3_probab_L2.pdf.

6.1 Arbres simples

6.1.1 Exemple – Pièce de monnaie

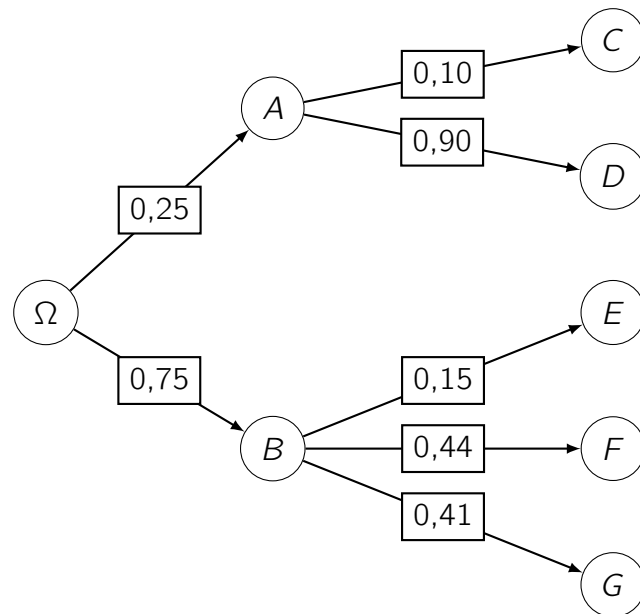
On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée et l'on regarde si l'on a pile (P) ou face (F). On modélise la situation à l'aide d'un arbre.



Question : Quelle est la probabilité d'avoir exactement une fois P ?

6.2 Arbres pondérés

Soit la représentation, sous la forme d'un arbre pondéré, d'une expérience quelconque :



6.2.1 Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.
3. La probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation.

6.2.2 Exemple 1 – Pièces défectueuses

Dans un atelier, il y a 2 % de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si l'on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :

- * Si la pièce est correcte, elle est acceptée par ce test à 96 %.
- * Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97 %.

Soient les événements suivants :

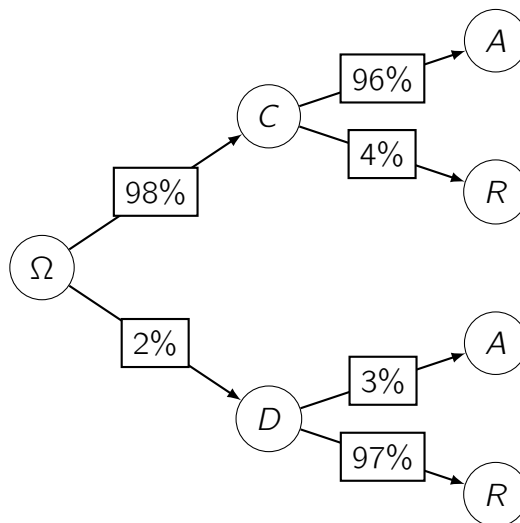
C : « la pièce est correcte »

D : « la pièce est défectueuse »

A : « la pièce est acceptée »

R : « la pièce est refusée »

Construisons l'arbre. Sachant que les événements ne sont pas équiprobables, on construira donc un arbre pondéré.

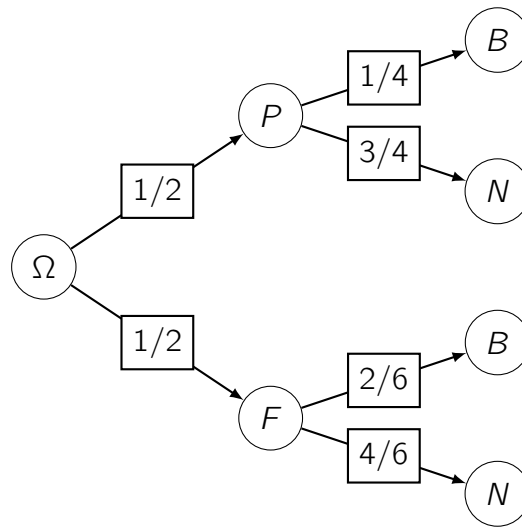


Question : Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée par le test ?

6.2.3 Exemple 2 – Pièce de monnaie et boules

Dans un jeu, on lance une pièce bien équilibrée. Si l'on obtient pile (P), alors on tire une boule dans une urne qui contient une boule blanche et 3 boules noires. Par contre, si l'on obtient face (F), alors on tire une boule d'une urne qui contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

Cette expérience est représentée sur l'arbre pondéré suivant :

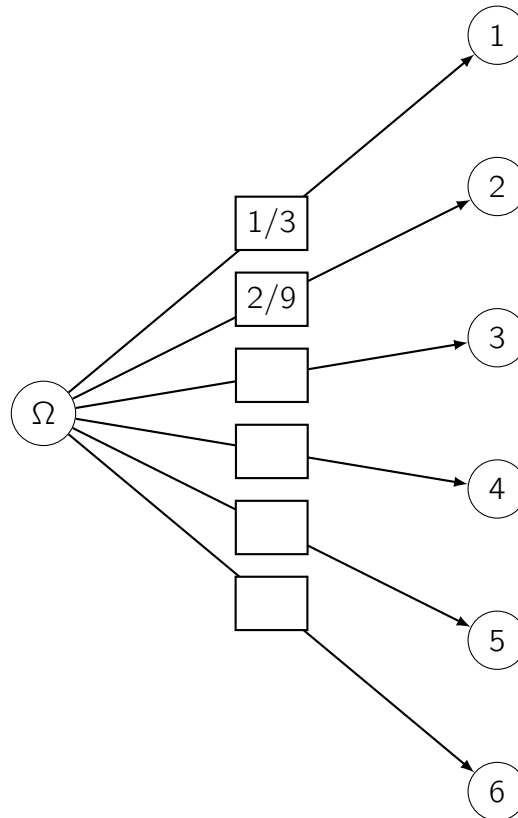


Question : Quelle est la probabilité d'avoir une boule noire si l'on a eu le côté face de la pièce de monnaie auparavant (F;•) ?

6.2.4 Exemple 3 – Dé truqué

On lance un dé truqué tel que la probabilité pour qu'il tombe sur 1 est de $1/3$, celle qu'il tombe sur 2 est de $2/9$ tandis que les quatre autres résultats possibles sont équiprobables.

Cette expérience est représentée sur l'arbre pondéré suivant :



Question : Calculer la probabilité que le dé tombe sur un nombre impair.

6.3 Probabilités conditionnelles

6.3.1 Exemple 1 – Bibliothèque

Dans une bibliothèque comportant 150 ouvrages, il y en a 60 qui sont écrits en anglais dont 12 portent sur la psychologie.

Soient les événements suivants :

A : « Le livre est écrit en anglais »

B : « Le livre porte sur la psychologie »

$\Rightarrow A \cap B$: « Le livre est écrit en anglais et porte sur la psychologie »

On a donc :

$$P(A) = \frac{60}{150} \quad P(A \cap B) = \frac{12}{150}$$

Il s'agit de probabilités tout-à-fait traditionnelles. Dans le cas de probabilités conditionnelles, on écrira :

B/A : « Le livre porte sur la psychologie sachant qu'il est écrit en anglais »

$$P(B/A) = \frac{12}{60}$$

Il s'agit en réalité de la fréquence des livres de psychologie parmi les livres en anglais.

On constate les relations suivantes :

$$P(B/A) = \frac{12}{60} = \frac{\frac{12}{150}}{\frac{60}{150}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donc :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

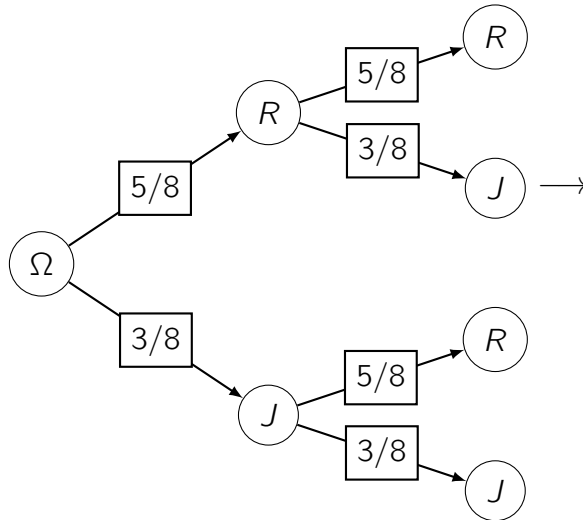
Ou encore :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

6.3.2 Exemple 2 – Urne et boules

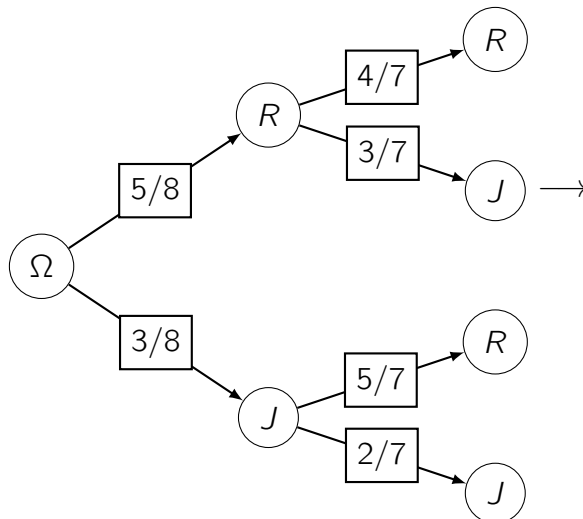
Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules jaunes. On tire successivement deux boules au hasard.

■ Calculer la probabilité de tirer, dans l'ordre, une boule rouge et une boule jaune si le tirage se fait avec remise. Pour ce faire, représentons d'abord la situation avec un arbre :



$$P(R; J) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

■ Calculer la probabilité de tirer, dans l'ordre, une boule rouge et une boule jaune si le tirage se fait maintenant sans remise. Représentons cette situation par un arbre :



$$P(R; J) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

6.4 Exercices à résoudre à l'aide d'un arbre

Remarque préliminaire : toutes les réponses seront données sous la forme décimale et arrondies au 1 000^e.

Exercice 1

En Belgique (en 2021), la probabilité qu'à la naissance un enfant soit un garçon est de 0,5112. Calculer la probabilité que, dans une famille de deux enfants :

- a) les deux enfants sont des filles.
- b) le premier enfant est une fille et le second un garçon.

Exercice 2

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules jaunes. On tire successivement deux boules, avec remise. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « une boule est rouge, l'autre jaune »
- B : « les boules sont de couleurs différentes »

Exercice 3

Un sac contient 4 billes jaunes, 2 bleues et 3 vertes. On tire successivement, et sans remise, deux billes. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « les deux billes sont jaunes »
- B : « une bille est bleue et l'autre verte »
- C : « les deux billes sont de couleurs différentes »

Exercice 4

Lors d'un match de tennis, un entraîneur a calculé que son joueur avait une probabilité de 0,65 de réussir son premier service et 80 % de chance de réussir le second. Calculer la probabilité que le joueur effectue une double faute.

Exercice 5

Considérons trois urnes numérotées de 1 à 3.

L'urne 1 contient trois boules noires et trois boules blanches.

L'urne 2 contient trois boules blanches et deux boules vertes.

L'urne 3 contient trois boules rouges, une boule noire et neuf boules blanches.

L'expérience consiste à piocher une boule au hasard dans l'urne 1, puis dans l'urne 2, etc. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « les trois boules ont la même couleur »

B : « deux boules ont la même couleur »