

Guy DOTREMONT

Mathématique

Sixième

UAA 2 Modèles de croissance

Chapitre 1

Les suites arithmétiques

1.1 Activité – La dune (1)

Une dune mesurait 200 mètres de large en 2010. Une équipe de scientifiques constate que chaque année la largeur de cette dune diminue de 2,5 mètres sous l'effet de l'érosion.

On note u_n la largeur de la dune en $(2010+n)$. Ainsi, u_0 représente la largeur de la dune en 2010 et vaut 200.

1. Que représente u_1 ? Calculer la valeur de u_1 .
2. Que représente u_2 ? Calculer la valeur de u_2 .
3. Que représente u_{15} ? Déterminer la valeur de u_{15} .

La dune joue un rôle important : elle protège les polders des risques d'inondation et intervient dans la gestion de la qualité des eaux.

Les scientifiques estiment qu'en dessous de 30 mètres de large, la dune ne peut plus assurer ce rôle en cas de phénomènes exceptionnels (tempêtes). Les autorités prévoient donc de ralentir l'érosion par des plantations d'oyats⁽¹⁾ et la mise en place de barrières dès que la dune atteindra 60 mètres de large.

En quelle année, au plus tard, devra-t-on intervenir ?

1.2 Définition

Une suite arithmétique est une suite de nombres dont chacun vaut le précédent additionné à un nombre fixe appelé la raison (notée r).

1.3 Calcul de u_n

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = \overbrace{u_0 + r}^{u_1} + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = \overbrace{u_0 + 2r}^{u_2} + r = u_0 + 3r$$

$$u_4 = u_3 + r = \overbrace{u_0 + 3r}^{u_3} + r = u_0 + 4r$$

...

$$u_n = u_0 + nr$$

(1). L'oyat (*Ammophila arenaria*), appelé aussi *chiendent marin*, est une espèce de plante vivace de la famille des Poacées, originaire de l'Ancien Monde, croissant dans les terrains sablonneux grâce à un système racinaire très profond. (Page Wikipedia consultée le 15.02.2021)

1.4 Généralisation

$$u_0 \qquad u_1 \qquad u_2 \qquad u_3 \qquad u_4 \qquad u_5$$

Si l'on souhaite calculer u_5 en connaissant u_2 , on voit que

$$u_5 = u_2 + 3r$$

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

On peut donc généraliser :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

avec $(n \geq p)$

1.5 Activité – La dune (2)

En partant de l'activité proposée, calculer u_{12} en sachant que $u_4 = 190$.

1.6 Calcul d'une somme

Nous cherchons à calculer la somme suivante :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Nous pouvons écrire cette somme sous la forme suivante :

$$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots \\ + (u_0 + (n - 2)r) + (u_0 + (n - 1)r) + (u_0 + nr)$$

Écrivons cette somme dans les deux sens possibles, à savoir, d'une part, du premier au dernier terme et, d'autre part, du dernier au premier terme :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots \\ &\quad + (u_0 + (n-2)r) + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\ S &= (u_0 + nr) + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + (n-2)r) + \dots \\ &\quad + (u_0 + 2r) + (u_0 + r) + u_0 \end{aligned}$$

Si l'on additionne ces deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} 2S &= (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + \dots \\ &\quad + (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= (n+1) \cdot (2u_0 + nr) \\ S &= \frac{(n+1) \cdot (2u_0 + nr)}{2} \\ S &= \frac{(n+1) \cdot \left(u_0 + \overbrace{u_0 + nr}^{u_n} \right)}{2} \end{aligned}$$

Mais comme $u_0 + nr = u_n$, alors

$$S = \frac{(n+1) \cdot (u_0 + u_n)}{2}$$

Si l'on doit calculer la somme, non pas depuis u_0 mais depuis un terme quelconque u_p , alors nous utiliserons la formule généralisée suivante :

$$S = \frac{(n-p+1) \cdot (u_p + u_n)}{2}$$

avec $(n \geq p)$

1.7 Exemples

Exemple 1

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 = ?$$
$$(S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = ?)$$

$$S = \frac{(6 + 1) \cdot (5 + 23)}{2} = 98$$

Mais pourrait-on commencer à u_1 au lieu de u_0 ? Réponse par le calcul :

$$S = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 = ?$$
$$(S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = ?)$$

$$S = \frac{(7 - 1 + 1) \cdot (5 + 23)}{2} = 98$$

Exemple 2

Si $u_4 = 9$ et $u_{10} = -3$, alors que vaut la somme :

$$S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = ?$$

$$S = \frac{(10 - 4 + 1) \cdot (9 + (-3))}{2} = 21$$

Exemple 3

Et si l'on demandait de calculer la somme des 100 premiers nombres entiers, comment ferait-on ?

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = \frac{\overbrace{(99 + 1)}^{100} \cdot (1 + 100)}{2} = 5\,050$$

1.8 Exercices

Exercice 1

Sachant que $u_0 = 1\,000$ et $r = 600$, calculer u_5 et S telle que

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

Exercice 2

Sachant que $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$, calculer r .

Exercice 3

Sachant que $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$, calculer u_1 .

Exercice 4

Sachant que $u_{10} = 9$ et $u_{18} = 21$, calculer u_{24} et S telle que

$$S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{24}$$

Exercice 5

Calculer la somme des

1. 100 premiers nombres pairs.
2. 50 premiers multiples de 3.
3. 30 premiers multiples de 7.

Exercice 6

Les trois angles d'un triangle forment une suite arithmétique de raison 12° ; déterminer l'amplitude de ces angles (en utilisant la formule qui convient du chapitre actuel).

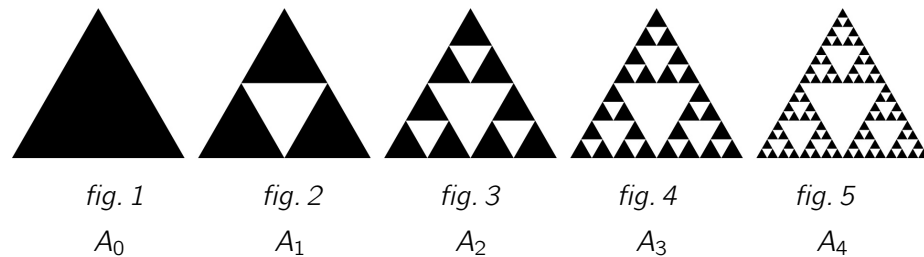
Exercice complémentaire 1

Un jeu télévisé est organisé de la façon suivante : si le candidat donne une bonne réponse à la première question, il gagne 25€. Ensuite, chaque bonne réponse rapporte 15€ de plus que la précédente. Le jeu s'arrête à la première réponse fausse.

Quel est le nombre minimal de bonnes réponses que doit donner un candidat pour que le total de ses gains s'élève au moins à 1 000€ ?

2.1 Activité – Triangle de Sierpiński (1)

La figure ci-dessous montre les premières étapes de la construction du « triangle de Sierpiński ⁽¹⁾ » ⁽²⁾



Si l'on pose que l'aire du triangle noir de la figure 1 possède une aire de 4 cm^2 ($A_0 = 4$), calculer l'aire des triangles noirs des autres figures.

• Aire de la figure 2 : $A_1 =$

• Aire de la figure 3 : $A_2 =$

(1). Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) est un mathématicien polonais.

(2). Le triangle de Sierpiński, dessiné en 1915, est un exemple de fractale. On le construit en commençant par dessiner un triangle équilatéral noir. On le divise ensuite en quatre triangles équilatéraux et congruents puis le triangle central est ôté. À l'étape suivante, on recommence le même processus avec chacun des triangles noirs. En poursuivant ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpiński.

• Aire de la figure 4 : $A_3 =$

• Aire de la figure 5 : $A_4 =$

Déterminer la formule permettant de calculer l'aire des triangles noirs pour n'importe quelle figure.

$$A_n =$$

2.2 Définition

Une suite géométrique est une suite de nombres dont chacun vaut le précédent multiplié par un nombre fixe appelé la raison (notée q).

2.3 Calcul de u_n

$$u_1 = u_0 \cdot q$$

$$u_2 = u_1 \cdot q = u_0 \cdot q \cdot q = u_0 \cdot q^2$$

$$u_3 = u_2 \cdot q = u_0 \cdot q^2 \cdot q = u_0 \cdot q^3$$

$$u_4 = u_3 \cdot q = u_0 \cdot q^3 \cdot q = u_0 \cdot q^4$$

...

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

2.4 Généralisation

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5$$

Si l'on souhaite calculer u_5 en connaissant u_2 , on voit que

$$u_5 = u_2 \cdot q^3$$

$$u_5 = u_2 \cdot q^{(5-2)}$$

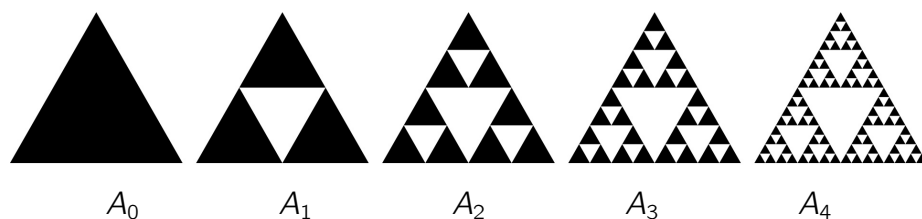
On peut donc généraliser :

$$u_n = u_p \cdot q^{(n-p)}$$

avec $(n \geq p)$

2.5 Activité – Triangle de Sierpiński (2)

En partant de l'activité proposée au début du chapitre (p.8), calculer A_9 sachant que A_4 vaut $\frac{81}{64}$.



2.6 Calcul d'une somme

Nous cherchons à calculer la somme suivante :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Nous pouvons écrire cette somme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S = & u_0 + (u_0 \cdot q) + (u_0 \cdot q^2) + \cdots \\ & + (u_0 \cdot q^{(n-2)}) + (u_0 \cdot q^{(n-1)}) + (u_0 \cdot q^n) \end{aligned}$$

Mettons u_0 en évidence :

$$S = u_0 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n)$$

Laissons cette équation de côté pour le moment et attardons-nous sur la grande parenthèse de droite

$$S_{droite} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n \quad (1)$$

Si l'on multiplie cette somme par q , on obtient :

$$\begin{aligned} q \cdot S_{droite} &= q \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n) \\ q \cdot S_{droite} &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n + q^{(n+1)} \end{aligned} \quad (2)$$

En soustrayant membre à membre les égalités (1) et (2), donc (1)–(2), on obtient :

$$\begin{aligned} S_{droite} - q \cdot S_{droite} &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n) \\ &\quad - (q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n + q^{(n+1)}) \\ S_{droite} \cdot (1 - q) &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{(n-1)} + q^n \\ &\quad - q - q^2 - \cdots - q^{(n-1)} - q^n - q^{(n+1)} \end{aligned}$$

Il reste donc

$$S_{droite} \cdot (1 - q) = 1 - q^{(n+1)}$$

Et donc

$$S_{droite} = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

La somme recherchée devient donc :

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

Si l'on doit calculer la somme, non pas depuis u_0 mais depuis un terme quelconque u_p , alors nous utiliserons la formule généralisée suivante :

$$S = u_p \cdot \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$$

avec $(n \geq p)$

2.7 Exemples

Exemple 1

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = ?$$

$$(S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = ?)$$

$$S = 3 \cdot \frac{1 - 2^{(5+1)}}{1 - 2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2^{(6)}}{1 - 2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 64}{-1}$$

$$= 3 \cdot \frac{-63}{-1}$$

$$= 3 \cdot 63$$

$$= 189$$

Exemple 2

Si $u_4 = 9$ et $q = \frac{2}{3}$, alors que vaut la somme :

$$S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = ?$$

$$S = 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(8-4+1)}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(5)}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{32}{243}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$= 9 \cdot \frac{\frac{243}{243} - \frac{32}{243}}{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}}$$

$$= 9 \cdot \frac{\frac{211}{243}}{\frac{1}{3}}$$

$$= 9 \cdot \frac{211}{243} \cdot \frac{3}{1}$$

$$= 9 \cdot \frac{211}{81}$$

$$= \frac{211}{9}$$

2.8 Exercices

Exercice 1

Sachant que $u_8 = \frac{125}{32}$ et $q = \frac{-1}{2}$,

1. Calculer le terme u_0
2. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 2

Sachant que $u_5 = \frac{-81}{32}$ et $q = \frac{3}{2}$,

1. Calculer le terme u_1
2. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 3

Sachant que $u_7 = 0,512$ et $u_{10} = 4,096$,

1. Calculer la raison q
2. Calculer le terme u_0
3. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 4

Sachant que $u_0 = 16$ et $u_4 = 81$, calculer la raison q .

Exercice 5

Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 0,5$,

1. Calculer le terme u_5
2. Calculer la somme des six premiers termes de cette série.

Exercice 6

Sachant que $u_5 = 729$ et $q = -3$,

1. Calculer le terme u_{10}
2. Calculer le terme u_0

Exercice 7

Je place un capital de 20 000 € à 5% l'an.

1. De combien disposerais-je après 4 ans ?
2. Et après 10 ans ?

Exercice 8

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 3 + 60 + 1\,200 + 24\,000 + 480\,000$$

Exercice 9

Calculer la somme des six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 5.

Exercice 10

En utilisant la formule adéquate, calculer la somme suivante :

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2\,187 + 6\,561$$

Exercice 11

Dans une évaluation, se trouve l'énoncé suivant :

« Calculer la somme des dix premiers termes d'une suite géométrique dont $u_0 = -5$ et $u_2 = -45$. »

À la fin de l'évaluation, tu compares ta réponse à celle de ton voisin. Tu as obtenu 73 810 et ton voisin a trouvé -147 620. Qui a raison ? Justifier.

2.9 Exercices S.A. / S.G.

Exercice 1

Lorsque l'on est face à des séries de valeurs, comment peut-on distinguer celles qui sont des suites arithmétiques de celles qui sont des suites géométriques ?

Exercice 2

Pour chaque série de valeurs ci-dessous, dire s'il s'agit d'une série arithmétique ou d'une série géométrique en cochant la case correcte, puis justifier son choix en indiquant la valeur de la raison.

2.1

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.2

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.3

7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.4

2020 ; 1010 ; 0 ; -2020 ; -1010

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.5

9 ; 7 ; 5 ; 3 ; 1

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.6

0,000 1 ; 0,001 ; 0,01 ; 0,1 ; 1

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.7

81 ; 88 ; 96 ; 105 ; 115

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.8

3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.9

1,4 ; 1,68 ; 2,016 ; 2,4192 ; 2,90304

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.10

2020 ; 1010 ; 0 ; -1010 ; -2020

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.11

77 ; 88 ; 99 ; 111 ; 123

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.12

-1250 ; 250 ; -50 ; 10 ; -2

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

2.13

4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36

- ☐ C'est une suite arithmétique.
- ☐ C'est une suite géométrique.
- ☐ Ce n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
- ☐ C'est une suite arithmétique et géométrique en même temps.

Justification :

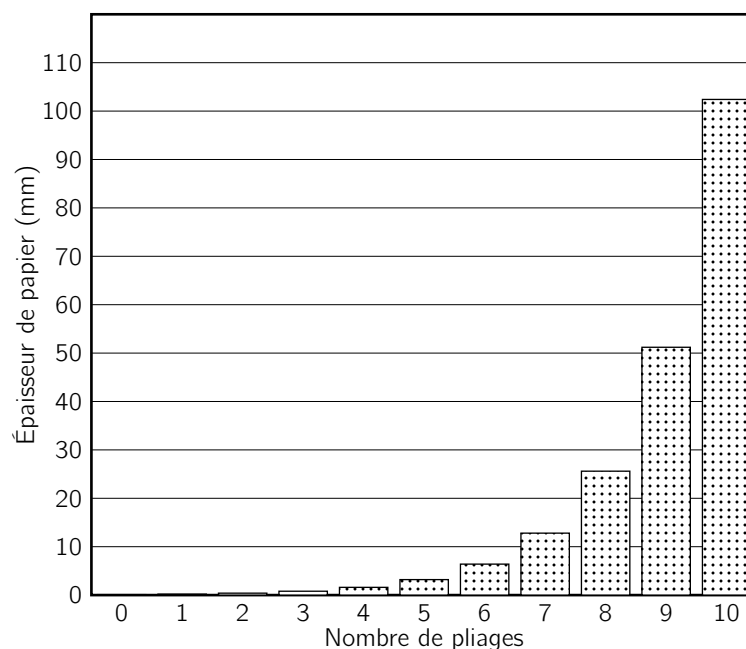
Les fonctions puissance et exponentielle

3.1 Activité – La feuille de papier

Partons du principe que l'on puisse plier indéfiniment une feuille de papier.

Si l'on plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, en quatre, en huit, en seize,... et ceci cinquante fois, serait-il possible d'obtenir une épaisseur qui dépasserait la distance de la Terre à la Lune (~385 000 km) ?

Commençons par calculer l'épaisseur pour quelques pliages et portons-les en graphique pour obtenir une meilleure vision du « phénomène » :



Nous constatons qu'après seulement 10 pliages, l'épaisseur est déjà de 102,4 mm.

La formule permettant de calculer rapidement l'épaisseur (e) est :

$$e = 0,1 \cdot 2^n$$

où n est le nombre de pliages

Et nous nous rendons compte que, malgré la fine épaisseur de la feuille de papier, l'épaisseur augmente de manière exponentielle avec le nombre de pliages pour atteindre rapidement des valeurs considérables ⁽¹⁾.

Pour en revenir au questionnement du début de l'activité, faisons le calcul de l'épaisseur pour 50 pliages :

$$\begin{aligned}e &= 0,1 \cdot 2^{50} \\&= 112\,589\,990\,684\,262,4 \text{ mm} \\&= 112\,589\,990,7 \text{ km}\end{aligned}$$

À cette distance, il y a longtemps que la Lune est dépassée. De plus, avec un seul pliage supplémentaire, on dépasse la distance Terre-Soleil ⁽²⁾.

3.2 Fonction exponentielle

La fonction observée ici est une fonction dite exponentielle, du type

$$f(x) = a^x$$

$$\text{avec : } a > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1$$

Il est important de bien faire la différence entre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances. Dans une fonction puissance, l'exposant est fixé et la base varie, tandis que dans une fonction exponentielle, la base est fixée et c'est l'exposant qui varie.

3.2.1 Exemple de fonction puissance

$$f(x) = x^3 \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{3}x^4 \quad ; \quad f(x) = 2\pi x^2 \quad ; \quad \dots$$

3.2.2 Exemple de fonction exponentielle

$$f(x) = 2^x \quad ; \quad f(x) = 100 \cdot 1,03^x \quad ; \quad \dots$$

(1). Je vous invite à lire l'article paru en 2012 dans le *Nouvel Observateur* : <https://www.nouvelobs.com/les-internets-vous-parlent/20120113.OBS8766/un-nouveau-record-du-monde-de-plier-de-papier.html>.

Si vous avez l'occasion de lire l'article paru sur le site *New Scientist*, c'est encore mieux (<https://www.newscientist.com/article/mg21228441-700-scrunch-time-the-peculiar-physics-of-crumpled-paper/>). Dernière consultation des pages le 4 juin 2022.

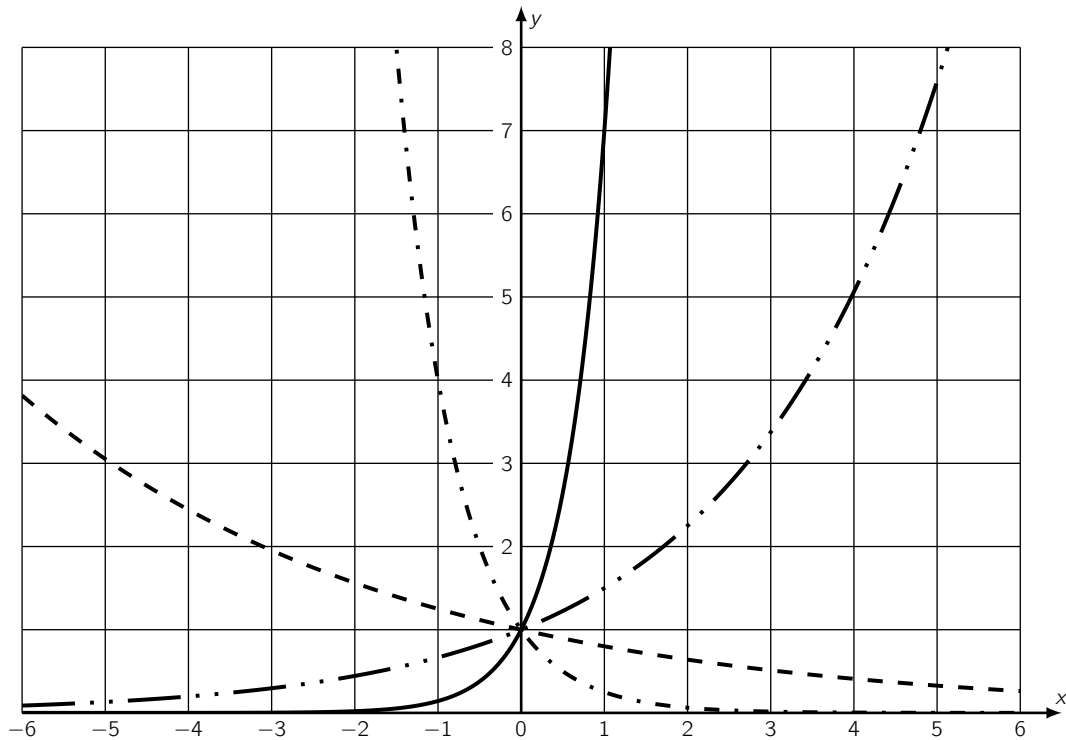
(2). Épaisseur atteinte de 225 179 981,4 km, soit environ 1,5 fois la distance Terre-Soleil.

3.3 Représentation graphique

Voici le graphe des quatre fonctions exponentielles suivantes :

$$f(x) = 0,25^x \quad ; \quad f(x) = 1,5^x \quad ; \quad f(x) = 7^x \quad ; \quad f(x) = 0,8^x$$

Saurez-vous les identifier ?



3.4 Constatations / recherche

- * Toutes ces courbes se coupent en un seul point : $(0; 1)$

En effet, dans la fonction $f(x) = a^x$, quelle que soit la valeur de la base, si x vaut zéro, la fonction vaudra toujours 1.

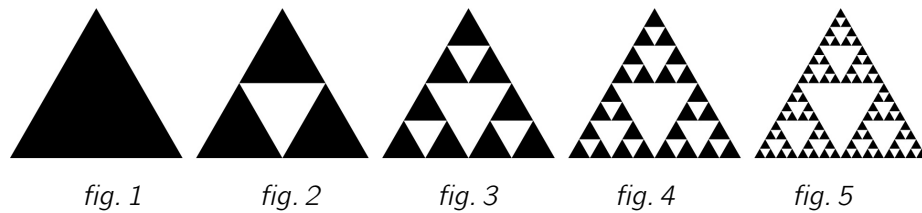
- * Deux fonctions sont croissantes : _____ et _____
Deux fonctions sont décroissantes : _____ et _____
→ Comment sont les bases ?

- * $a^x > 0$ ce qui fait que toutes les fonctions exponentielles se trouvent au-dessus de l'axe x , axe qui est aussi une asymptote⁽³⁾ horizontale (en $-\infty$ et en $+\infty$, en fonction de la valeur de la base).

(3). Une asymptote est une droite que la courbe d'une fonction approche de plus en plus près, sans jamais la toucher, quand la variable tend vers une certaine valeur ou vers l'infini.

3.5 Activité – Triangle de Sierpiński (3)

Repartons de l'activité de la page 8. La figure ci-dessous montre les premières étapes de la construction du « triangle de Sierpiński »



1. Écrire les sept premiers termes (de u_0 à u_6 , n allant donc de 0 à 6) de la suite formée par le nombre de triangles noirs de chacune des figures.
2. Déterminer le terme u_9 de cette série.
3. Écrire la formule donnant le nombre de triangles noirs d'une figure en fonction de sa position n .
4. Essayons d'écrire une équation qui va permettre de déterminer la position n pour laquelle il y a 531 441 triangles noirs dans la figure.
5. Est-il possible de résoudre cette équation ? Pourquoi ?

Pour pouvoir résoudre une équation du type $a^x = b$, il est nécessaire de connaître une nouvelle notion : les logarithmes.

4.1 Introduction

Nous allons introduire la notion de logarithme par quelques applications de la vie courante.

4.1.1 L'acidité d'une solution aqueuse

En 1909, le chimiste danois Sørensen introduit la notion de « potentiel hydrogène » en définissant l'acidité d'une solution comme étant le cologarithme décimal de la concentration en ions hydrogène.

Cette définition est plus connue sous la formule (sans unité) :

$$pH = -\log [H^+]$$

Cette notion est bien plus complexe mais il n'entre pas dans le cadre de ce cours de l'étudier plus en profondeur⁽¹⁾.

4.1.2 La magnitude d'un tremblement de terre

Celle-ci mesure l'énergie libérée lors d'un séisme. C'est en 1935 que Charles Richter⁽²⁾ met au point une échelle sur laquelle il indique les magnitudes des séismes.

De nos jours, on ne peut plus se baser sur l'échelle de Richter car elle est dépassée. En effet, elle est très locale et adaptée uniquement aux tremblements de terre californiens. C'est donc improprement que les médias utilisent le terme d'échelle de Richter. Ils devraient plutôt employer celle de Richter-Gutenberg⁽³⁾ établie en 1945.

(1). La notion d'acidité est vue plus en détail dans le cours de *Formation scientifique*, UAA 14.

(2). Charles Francis Richter (1900-1985), sismologue américain.

(3). Beno Gutenberg (1889-1960) est géologue et sismologue allemand, renommé et connu pour ses travaux sur la structure interne de la Terre, notamment pour avoir défini, avec Charles Richter, l'échelle de magnitude Richter-Gutenberg.

Voici la définition originale donnée par Richter (en 1935) et que l'on appelle de nos jours « magnitude locale » (M_L , sans unité) :

$$M_L = \ln(A) - \ln(A_0) + c \cdot \ln(\Delta)$$

- * A représente l'amplitude maximale mesurée sur le sismogramme ;
- * A_0 est une amplitude de référence correspondant à un séisme de magnitude 0 (zéro) à 100 km ;
- * Δ est la distance épicentrale, en kilomètres ;
- * c est une constante d'étalonnage.

Comme il s'agit d'une échelle logarithmique ⁽⁴⁾, on a donc affaire à une échelle ouverte.

Le séisme le plus violent à été enregistré au Chili le 22 mai 1960 avec une magnitude de... 9,5 ! ⁽⁵⁾

4.1.3 Le niveau sonore

Il est courant d'entendre parler de décibels pour un son, mais de quoi s'agit-il ?

En réalité, le son résulte d'une pression exercée sur nos tympans. Cette pression, comme toute pression, se mesure en pascals (Pa).

L'oreille est un organe extrêmement sensible. Il perçoit des pressions acoustiques variant de $2 \cdot 10^{-5}$ Pa à 20 Pa. L'échelle varie donc de 1 à 1.000.000 !

Pour simplifier la mesure du niveau de pression acoustique, encore appelé *niveau sonore*, les acousticiens ont adopté une échelle logarithmique.

L'unité du niveau sonore est le décibel.

$$L_P = 10 \cdot \frac{\log(P^2)}{\log(P_0^2)}$$

- * P est la pression acoustique mesurée ;
- * P_0 est la pression acoustique de référence ($2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$).

(4). Il s'agit bien de logarithme. La notation « $\ln$ » fait référence au *logarithme naturel*, appelé également *logarithme népérien* en hommage au mathématicien John Napier qui établit les premières tables logarithmiques. John Napier (1550-1617) est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

(5). Excellent site à consulter par les curieux ou les angoissés : <https://www.volcanodiscovery.com> (dernière visite le 4 mai 2025).

4.2 Et avant les calculatrices scientifiques ?

On utilisait des livres regroupant, entre autres, des tables de logarithmes. Ces tables avaient été calculées auparavant par des hommes, à la main, pendant des heures, pour ne finalement comporter « que » cinq décimales.

En voici un extrait :

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 100

N	log.	N	log.	N	log.	N	log.	N	log.
1	00 000	21	32 222	41	61 278	61	78 533	81	90 849
2	30 103	22	34 242	42	62 325	62	79 239	82	91 381
3	47 712	23	36 173	43	63 347	63	79 934	83	91 908
4	60 206	24	38 021	44	64 345	64	80 618	84	92 428
5	69 897	25	39 794	45	65 321	65	81 291	85	92 942
6	77 845	26	41 497	46	66 276	66	81 954	86	93 450
7	84 510	27	43 136	47	67 210	67	82 607	87	93 952
8	90 309	28	44 716	48	68 124	68	83 251	88	94 448
9	95 424	29	46 240	49	69 020	69	83 885	89	94 939
10	00 000	30	47 712	50	69 897	70	84 510	90	95 424
11	04 139	31	49 136	51	70 757	71	85 126	91	95 904
12	07 918	32	50 515	52	71 600	72	85 733	92	96 379
13	11 394	33	51 851	53	72 428	73	86 332	93	96 848
14	14 613	34	53 148	54	73 239	74	86 923	94	97 313
15	17 609	35	54 407	55	74 036	75	87 506	95	97 772
16	20 412	36	55 630	56	74 819	76	88 081	96	98 227
17	23 045	37	56 820	57	75 587	77	88 649	97	98 677
18	25 527	38	57 978	58	76 343	78	89 209	98	99 123
19	27 875	39	59 106	59	77 085	79	89 763	99	99 564
20	30 103	40	60 206	60	77 815	80	90 309	100	00 000

4.3 Logarithmes décimaux

Précisons, avant d'aller plus loin, qu'il existe un grand nombre de types de logarithme. Seulement deux sont couramment utilisés : le logarithme népérien (qui ne sera pas étudié dans ce cours) et le logarithme décimal.

4.3.1 Activités - Puissances et logarithmes

Activité 1.1

Écrire chaque nombre sous la forme d'une puissance de 10.

- | | |
|-------------|------------|
| • $100 =$ | • $10 =$ |
| • $1000 =$ | • $0,01 =$ |
| • $0,001 =$ | • $1 =$ |

Le logarithme décimal d'un nombre x est noté « $\log x$ » ; il équivaut à l'exposant de la puissance de 10 égale à ce nombre.

Exemple :

$$\log 10\,000\,000 = \log 10^7 = 7$$

Activité 1.2

Calculer le logarithme des nombres suivants en se basant sur l'exemple.

- | | |
|------------------|-----------------|
| • $\log 100 =$ | • $\log 10 =$ |
| • $\log 1000 =$ | • $\log 0,01 =$ |
| • $\log 0,001 =$ | • $\log 1 =$ |

À l'aide de la calculatrice, vérifier les réponses ci-dessus.

Activité 1.3

Calculer le logarithme des nombres suivants puis les vérifier à l'aide de la calculatrice.

- $\log 100\,000\,000 =$
- $\log 10^{-15} =$
- $\log 0,000\,01 =$
- $\log 10^{12} =$

Remarque : il n'est pas obligatoire que les puissances de 10 soient des valeurs entières.

Activité 2.1

À l'aide de la calculatrice, calculer le logarithme des nombres suivants à 0,001 près.

- $\log 7 =$
- $\log 0,000\,002 =$
- $\log 2,18 =$
- $\log \sqrt{3} =$
- $\log -7,9 =$
- $\log 0 =$
- $\log \pi =$
- $\log -1 =$
- $\log 1 =$
- $\log \frac{4}{9} =$

Activité 2.2

Quelle conclusion peut-on tirer de l'activité 2.1 ?

Activité 3.1

À l'aide de la calculatrice, calculer les expressions suivantes.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| • $\log 10^3 =$ | • $-1 \cdot \log 2 =$ |
| • $4 \cdot \log 5 =$ | • $3 \cdot \log 10 =$ |
| • $\log 2^{-1} =$ | • $10 \cdot \log 2 =$ |
| • $\log 5^4 =$ | • $\log 49^2 =$ |
| • $4 \cdot \log 7 =$ | • $\log 1024 =$ |

Activité 3.2

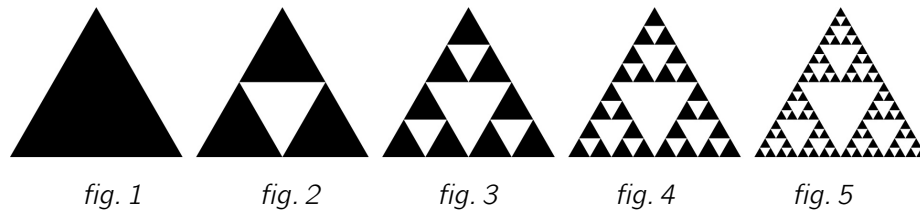
Dans l'activité 3.1 ci-dessus, regrouper deux par deux les expressions équivalentes (entourer, surligner,...)

Activité 3.3

Quelle conclusion peut-on tirer des activités 3.1 et 3.2 ?

4.3.2 Enfin, la réponse !

Rappelons-nous de l'activité de la page 8.



Nous avons déterminé les premiers termes de la suite (le nombre de triangles noirs de chaque figure) :

$$1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 ; 729 ; \dots$$

Nous avons également déterminé la formule permettant de calculer le nombre de triangles noirs d'une figure en fonction de sa position n :

$$u_n = 1 \cdot 3^n$$

Par contre, nous n'avons pas réussi à résoudre l'équation permettant de déterminer la position n (que l'on appelle aussi le *rang*) pour laquelle il y a 531 441 triangles noirs dans la figure. Maintenant, vous êtes à même de résoudre cette équation.

Pour résoudre cette équation, procédons par étape.

Étape 1 : écrire l'équation initiale.

$$531\,441 = 1 \cdot 3^n$$

Étape 2 : isoler le facteur 3^n .

$$531\,441 = 3^n$$

Étape 3 : appliquer le logarithme aux deux membres de l'équation.

$$\log 531\,441 = \log 3^n$$

Étape 4 : appliquer la propriété du logarithme d'une puissance.

$$\log 531\,441 = n \cdot \log 3$$

Étape 5 : isoler la variable et calculer sa valeur à l'aide de la calculatrice.

$$\frac{\log 531\,441}{\log 3} = n$$
$$n = 12$$

Étape 6 : écrire la réponse du problème à l'aide d'une phrase.

4.3.3 Un peu de pratique

À l'aide du raisonnement ci-dessus, résoudre les équations suivantes :

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

avec $u_n = 76\,972\,032$,

$$u_1 = 2\,349 \text{ et } q = 2$$

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

avec $u_n = 97\,200$,

$$u_5 = 1\,200 \text{ et } q = 3$$

4.4 Constatations

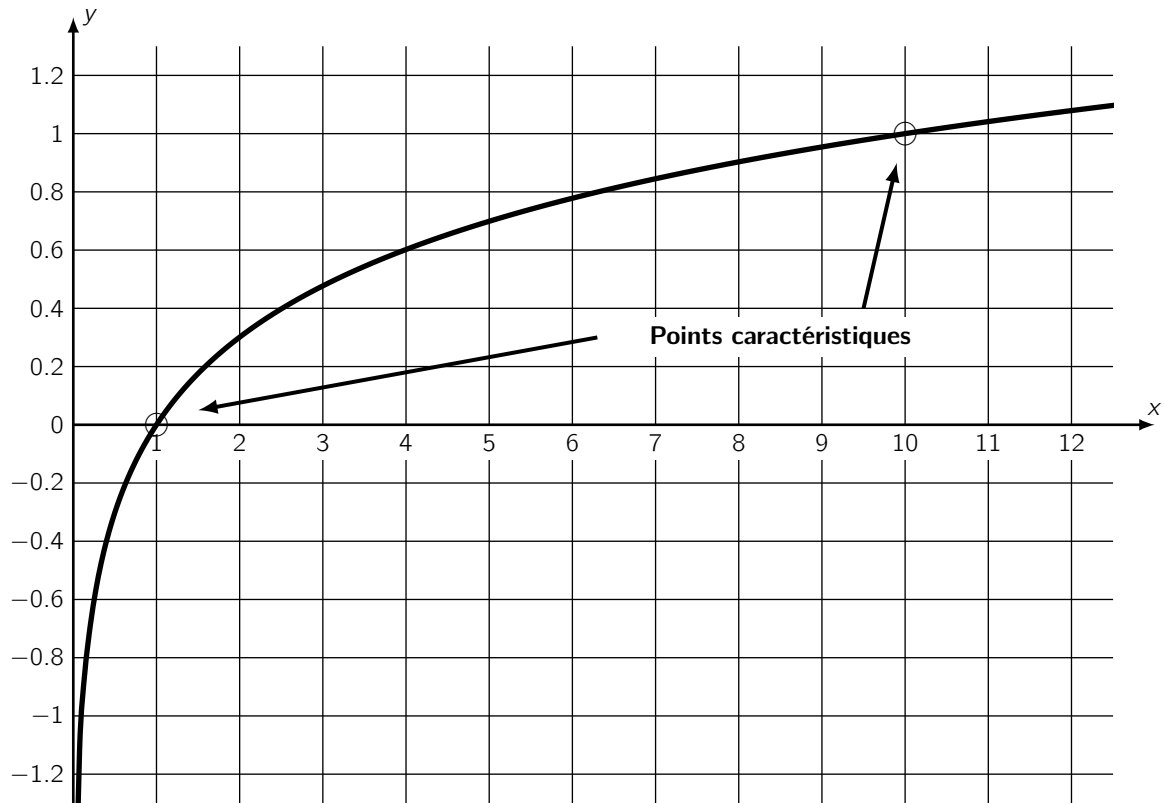
Au vu de ce qui vient d'être fait, nous constatons que :

1. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithme ;
2. Le logarithme de 1 est égal à zéro ;
3. Les logarithmes des nombres plus grands que 1 sont positifs ;
4. Les logarithmes des nombres supérieurs à 0 et inférieurs à 1 sont négatifs.

4.5 Définition

On appelle logarithme décimal d'un nombre x , noté « $\log x$ », l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 10 pour obtenir x (avec $x > 0$).

4.6 Représentation graphique



Remarquons que ce graphe n'est pas orthonormé.

4.7 Propriétés des logarithmes

Logarithme d'un produit :

$$\log AB = \log A + \log B$$

Logarithme d'un quotient :

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

Logarithme d'une puissance :

$$\log A^p = p \cdot \log A$$

Logarithme d'une racine :

La racine d'un nombre peut s'écrire sous la forme d'une puissance fractionnaire de ce nombre :

$$\sqrt[n]{A^p} = A^{\frac{p}{n}}$$

$$\log \sqrt[n]{A^p} = \log A^{\frac{p}{n}} = \frac{p}{n} \cdot \log A$$

4.8 Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes en donnant, si nécessaire, la solution à 0,001 près.

- $4^x = 16$
- $2,952\,45 = 5 \cdot 0,9^x$
- $724,077\,343\,9 = 4 \cdot 32^x$
- $48 = 3 \cdot 2^{x-3}$
- $2 \cdot 4^x = 256$
- $7 \cdot 3^{5-x} = \frac{7}{9}$
- $2\,655,992\,279 = 2,2^x$
- $4\,096 = 2^{3x}$
- $2 \cdot 0,4^x = 12,5$
- $3^{10+x} + 13 = 2\,200$

Exercice 2

Les parents de Benoit possèdent une citerne d'eau de pluie. Chaque jour de l'été, $1/16^e$ de l'eau s'évapore. Le premier jour de leur départ en vacances, la hauteur de l'eau contenue dans la citerne était de 1,20 mètre et le jour de leur retour, cette hauteur n'est plus que de 40 cm. Sachant qu'il n'a pas plu depuis leur départ, déterminer la durée de leurs vacances.

Exercice 3

Une balle est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. À chaque fois qu'elle touche le sol, elle rebondit jusqu'à 75 % de sa hauteur précédente.

1. Quelle hauteur atteint la balle après le troisième rebond ?
2. Quelle hauteur atteint la balle après le $n^{\text{ième}}$ rebond ?
3. Combien de fois la balle doit-elle rebondir avant que la hauteur soit inférieure à 15 cm ?

Exercice complémentaire 1

Émilie décide de courir chaque jour au cours de ses deux semaines (14 jours) de vacances. Le premier jour elle court 1 km. Chaque jour qui suit, elle court 25 % de plus que la distance courue la veille.

1. Quelle distance totale aura-t-elle parcourue à la fin de ses vacances ?
2. Quel jour parcourra-t-elle plus de 10 km ?

Exercice complémentaire 2



Dans le pédiluve de la piscine, on relève toutes les heures la concentration de désinfectant. À 11 heures, il y a 30,706 ppm de produit et à 14 heures, il y en a 18,857 ppm. On suppose que cette déperdition peut être modélisée par une suite géométrique.

1. Quelle est la concentration du produit qui a été mise dans l'eau du pédiluve à l'ouverture de la piscine à 8 heures ?
2. Si la concentration minimale acceptée est de 13 ppm, à quelle heure (heure entière) doit-on remettre du désinfectant dans le pédiluve ?

Exercice complémentaire 3

Calculer les logarithmes suivants en se basant sur les propriétés vues ci-dessus. Au terme du développement complet, il ne doit plus rester que des logarithmes de nombres premiers^a (ou éventuellement de 10), ensuite, l'utilisation de la calculatrice ou du tableau de la page 27 est nécessaire pour calculer la réponse finale.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| • $\log 14 =$ | • $\log 27^2 =$ |
| • $\log 10^{19} =$ | • $\log 60 =$ |
| • $\log 210 =$ | • $\log 121 =$ |
| • $\log 36 =$ | • $\log 245 =$ |
| • $\log 512 =$ | • $4 \cdot \log 100^3 =$ |

a. Un nombre premier est un nombre qui ne possède que deux diviseurs (distincts) : 1 et lui-même. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

Exercice complémentaire 4

Calculer les logarithmes suivants en se basant sur les propriétés vues ci-dessus. Après développement complet, l'utilisation de la calculatrice ou du tableau de la page 27 est nécessaire pour calculer la réponse finale.

Au terme du développement complet, il ne doit plus rester que des logarithmes de nombres premiers (ou éventuellement de 10).

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) $\log 10^{239} =$ | 12) $17 \cdot \log 900^4 =$ |
| 2) $\log 300 =$ | 13) $\log \sqrt[6]{64^4} =$ |
| 3) $\log 2700 =$ | 14) $\log \left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{128^{\frac{2}{5}}} \right) =$ |
| 4) $\log 32 =$ | 15) $\log \left(\frac{\sqrt[8]{49^4}}{10} \right)^{\frac{4}{3}} =$ |
| 5) $\log 33 =$ | 16) $\log \frac{\sqrt[3]{125^2}}{\sqrt[4]{625^2}} =$ |
| 6) $\log 81 =$ | 17) $\log \frac{121}{12} =$ |
| 7) $\log 30^2 =$ | 18) $3 \cdot \log \frac{25^2}{25^3} =$ |
| 8) $\log 10^{\frac{5}{3}} =$ | 19) $\log \sqrt[6]{\frac{3^9}{4^9}} =$ |
| 9) $\log 144 =$ | |
| 10) $\log 1024 =$ | |
| 11) $\log 2500^9 =$ | |

Introduction aux mathématiques financières

5.1 Intérêts simples et composés

Lorsque l'on donne le choix de recevoir une certaine somme maintenant ou plus tard, il est naturel de choisir de la recevoir immédiatement et ainsi donc de pouvoir l'utiliser éventuellement tout de suite. Dans le cas où l'on ne recevra cet argent que plus tard, on exige alors d'en recevoir plus, afin de « combler » cette privation. Cette rémunération supplémentaire est appelée intérêt. Ce qui va permettre de déterminer précisément cet intérêt, c'est le taux d'intérêt. Les taux d'intérêt sont déterminés en fonction de l'offre et de la demande de liquidités provenant des entreprises, du secteur public mais également des particuliers comme vous et moi. Il va de soi qu'il existe bien des taux d'intérêt et non pas un seul. Ceux-ci sont fonction de différents facteurs dont, bien sûr, l'échéance.

5.2 Terminologie

Le capital : La somme prêtée ou empruntée s'appelle le capital.

L'intérêt : La compensation exigée s'appelle l'intérêt.

L'intérêt est calculé selon un pourcentage du capital.

Le taux d'intérêt : Ce pourcentage s'appelle le taux d'intérêt.

La valeur acquise : La somme du capital et des intérêts accumulés après un certain temps constitue la valeur acquise (ou valeur finale) d'un placement ou d'un emprunt.

5.3 Différence entre intérêts simple et composé

Intérêts simples : utilisés pour des emprunts ou placements de courte durée (moins de 2 ans). L'intérêt est proportionnel au temps et généralement versé en une seule fois.

Intérêts composés : utilisés pour les durées longues (plus de 2 ans). Les intérêts s'ajoutent régulièrement au capital (on dit qu'ils sont capitalisés), produisant eux-mêmes des intérêts. Ils ne sont donc pas proportionnels à la durée.

5.4 Intérêts simples

5.4.1 Activité – Alexandra vs Audrey

Alexandra prête 1 200 € à Audrey à 3 % l'an. Le prêt doit être remboursé dans 4 ans et l'intérêt doit être versé chaque année à l'anniversaire du prêt. Déterminer l'intérêt annuel, l'intérêt total et la valeur acquise dans 4 ans.

	Calcul	Formule utilisée
Intérêt annuel :		
Intérêt total :		
Valeur acquise :		

5.4.2 Formules fondamentales

Calcul des intérêts

$$I = C \cdot t \cdot n$$

Calcul de la valeur acquise

$$A = C \cdot (1 + t \cdot n)$$

Où : A : la valeur future ou acquise ;
 C : le capital prêté ou emprunté ;
 t : le taux d'intérêt annuel ;
 n : le nombre d'années du prêt ou de l'emprunt.

5.5 Exercices

Exercice 1

Tarik emprunte 5 000 € à 4,5 % l'an, remboursable dans 3 ans. Il doit payer chaque année l'intérêt couru.

Calculer l'intérêt annuel, l'intérêt total et la valeur acquise (dans 3 ans).

Exercice 2

Kevin emprunte 8 500 € pour 2 ans au taux de 8,75 %. Les intérêts sont payables annuellement.

- * Quel sera l'intérêt annuel ?
- * Combien lui coûtera son emprunt ?
- * Déterminer la valeur finale du prêt.

Exercice 3

Ali emprunte 800 € et rembourse 840 € après 6 mois.

De quel taux d'intérêt annuel a-t-il bénéficié ?

Exercice 4

Annie emprunte 1 750 € et rembourse 1 800 € trois mois plus tard.

De quel taux d'intérêt annuel a-t-elle bénéficié ?

Exercice 5

Fabian emprunte 1 300 € au taux de 13 % l'an pour une période de 8 mois. Combien doit-il rembourser à l'échéance ?

Exercice 6

Nathalie a prêté une somme C pour un an et six mois au taux annuel de 12,25 %.

Les intérêts sont payables à la fin de la première année et à l'échéance.

Déterminer C , sachant que Nathalie a reçu en tout (capital et intérêts) la somme de 1 538,88 €.

Exercice 7

Sandrine a prêté 750 € au taux annuel de 5 %. À l'échéance, la valeur finale de son prêt est de 762,50 €. Calculer la durée du prêt.

Exercice 8

Fatima emprunte 3 000 € pour trois mois à un taux de 2,55 %.
Combien devra-t-elle verser à l'échéance ?

Exercice 9

Quelle somme Redouan a-t-il emprunté il y a six mois à un taux de 3 % l'an s'il doit maintenant remettre 2 842 € ?

Exercice 10

Julie prête 1 200 € à 3,15 % l'an. Le remboursement doit se faire dans 3 ans. Elle doit payer l'intérêt couru chaque année à l'anniversaire du prêt. Calculer l'intérêt annuel, l'intérêt total et la valeur acquise (dans 3 ans).

Exercice 11

Pour combien de temps Olivier a-t-il emprunté 750 € à un taux de 9 % s'il a dû rembourser 795 € ?

Exercice 12

À quel taux d'intérêt simple Magdalena a-t-elle emprunté 5 000 € pendant 5 ans si elle a dû rembourser en tout 7 250 € ?

Exercice 13

Je décide d'acheter 8 000 € de bons de caisse à 4 ans qui rapportent 2,80 % d'intérêt simple par an. Je dois payer 25 % de précompte mobilier sur les intérêts perçus.

- * Quel sera le montant total des intérêts nets perçus ?
- * Quel est le taux d'intérêt annuel net ?

5.6 Intérêts composés

5.6.1 Activité – Bons de croissance

J'achète 1 200 € en bons de croissance pour une durée de 4 ans à un taux annuel de 3%. J'opte pour la capitalisation, les intérêts seront donc capitalisés et versés une seule fois à l'échéance.

Calculer la valeur acquise au bout de :

1 an :

2 ans :

3 ans :

Quel est l'avantage d'un placement par capitalisation ?

Connaissant le capital initial, le taux d'intérêt et la durée du placement, il est ainsi possible de calculer directement la valeur acquise au bout des 4 ans :

$$A_4 = 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4$$

5.6.2 Formules fondamentales

Calcul de la valeur acquise

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

Calcul des intérêts

$$I = A - C$$

Où : A : la valeur future ou acquise ;
 C : le capital prêté ou emprunté ;
 t : le taux d'intérêt annuel ;
 n : le nombre d'années du prêt ou de l'emprunt.

5.7 Exercices

Exercice 1

Un capital de 5 000 € est placé, à intérêts composés, pendant 10 ans, au taux annuel de 4,5 %. Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts.

Exercice 2

Un capital de 7 200 € est placé, à intérêts composés, pendant 8 ans, au taux annuel de 6 %. Calculer la valeur acquise et le montant total des intérêts.

Exercice 3

J'ai emprunté 325 000 € à ma banque pour construire une maison. La durée de mon emprunt est de 20 ans. Combien devrais-je rembourser si je bénéficie d'un taux annuel de 4,3 % ?

Exercice 4

Un capital est placé, à intérêts composés, pendant 5 ans, au taux annuel de 5 %. La valeur acquise est de 8 933,97 €. Calcule le capital placé et le montant des intérêts perçus.

Exercice 5

Un capital est placé, à intérêts composés, pendant 7 ans, au taux annuel de 6 %. La valeur acquise est de 19 126,18 €. Calcule le capital placé et le montant des intérêts perçus.

Exercice 6

À quel taux faut-il placer par capitalisation 3 000 € pour obtenir 3 121,20 € après 2 ans ?

Exercice 7

À quel taux faut-il placer par capitalisation 10 000 € pour obtenir 13 022,60 € après 6 ans ?

Exercice 8

J'ai prêté 2 000 € à un taux annuel de 3 %. La personne m'a remboursé 2 459,75 € au total. Pendant combien de temps m'a-t-il emprunté les 2 000 € ?

Exercice 9

Je viens de rembourser la somme de 689 626,29 € suite à un emprunt de 350 000 € à un taux de 2,75 % l'an. Quel fut la durée de mon emprunt ?

Exercice 10

Pendant combien de temps ai-je emprunté la somme de 12 000 € au taux annuel de 1,21 % si je dois rembourser aujourd'hui la somme de 13 863,16 € ?

Exercice 11

J'ai placé, il y a quelques années déjà, la somme de 25 000 € sur un compte au nom de mon fils, le jour de son anniversaire. Aujourd'hui, il a 25 ans et décide de vider son compte. La banque lui donne la somme de 39 335,26 €. Sachant que le taux d'intérêt annuel a été de 2,55 % tout au long de la période, quel âge avait mon fils quand j'ai placé l'argent sur son compte ?

Exercice 12

À quel taux dois-je placer un certain capital C pour qu'il double de valeur au bout de 13 ans ?

Exercice 13

À quel taux dois-je placer un certain capital C pour qu'il triple de valeur au bout de 20 ans ?

Exercice 14

Est-il possible qu'une somme d'argent, placée sur un compte d'épargne, puisse fructifier de telle manière que sa valeur triple en seulement 5 ans ? Justifier.

Exercice 15

Lorsque je prendrai ma pension dans 40 ans, je souhaiterais avoir à ma disposition une somme de 50 000 €, après prélèvement par l'État d'un précompte mobilier de 20 %. Quelle somme dois-je placer sur mon compte, aujourd'hui, à intérêts composés et au taux annuel de 2 %, pour obtenir ce montant ?

Différents types de croissance

6.1 Croissance liée aux types d'intérêts

Rappelons-nous ce qui a été vu au chapitre précédent. Nous allons réaliser le graphique montrant la différence de croissance entre les intérêts simples et les intérêts composés.

6.1.1 Activité – Graphique

Un capital de 100 000 € est placé au taux annuel de 5 %. Établir le graphique de la valeur acquise en fonction du nombre d'années n si :

- a) l'intérêt est simple
- b) l'intérêt est composé

Les calculs et graphique sont à réaliser pages suivantes.

Rappel des formules du calcul de la valeur acquise :

Intérêts simples

$$A = C \cdot (1 + t \cdot n)$$

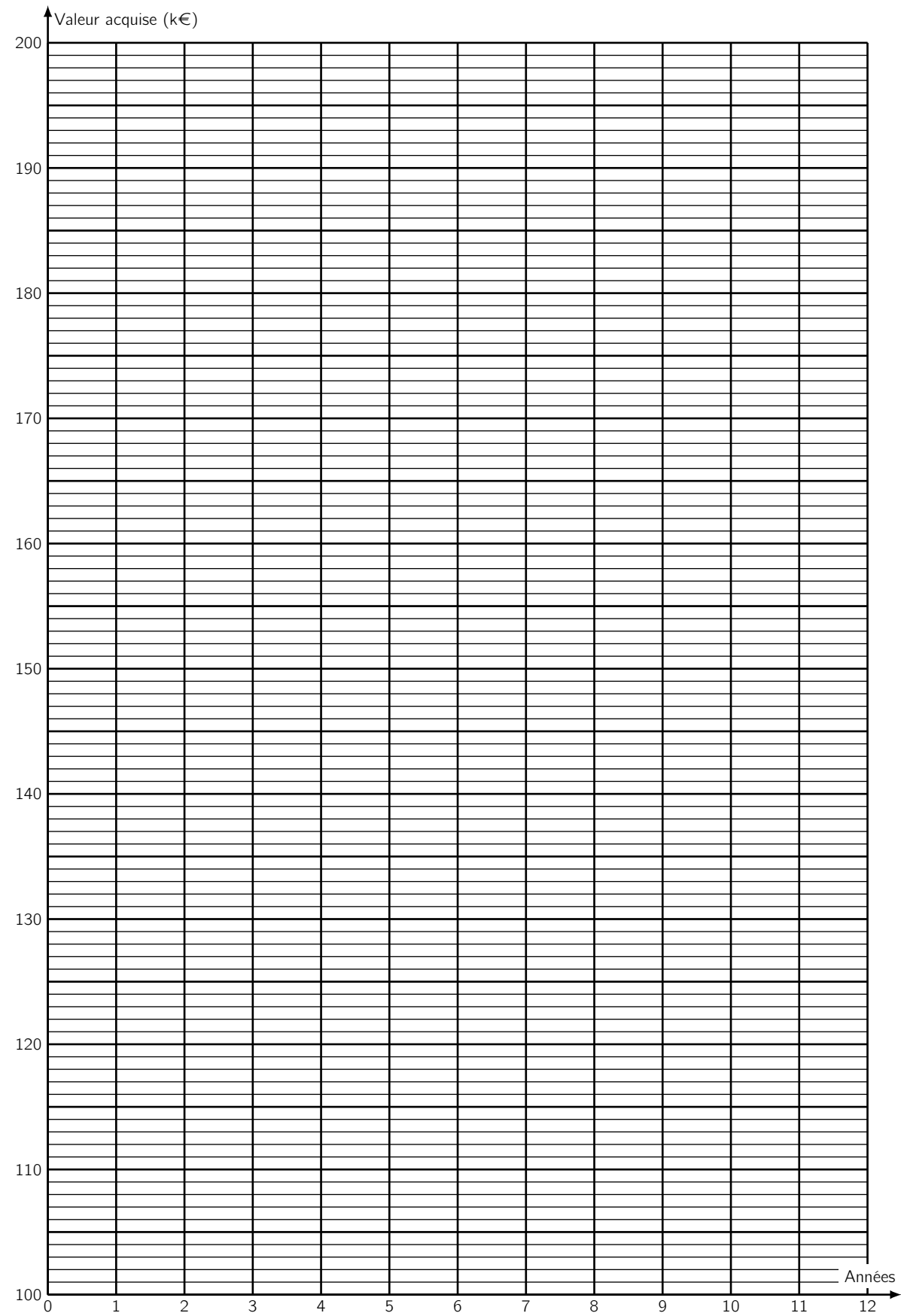
Intérêts composés

$$A = C \cdot (1 + t)^n$$

Compléter le tableau :

n	Calcul pour des intérêts simples : Valeur acquise	Calcul pour des intérêts composés : Valeur acquise
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Réaliser le graphe :



6.2 Exercices

Dans les exercices qui suivent, les graphes sont à réaliser sur une feuille séparée.

Exercice 1

Tracer le graphe de l'évolution de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté.

Exercice 2

Sachant qu'une population de bactéries double toutes les 20 minutes, tracer le graphe de la croissance d'une population initiale de 1 000 bactéries au cours des 10 premières heures.

Exercice 3

Le carbone 14 (^{14}C) est un isotope radioactif du carbone. Il a une demi-vie de 5 700 ans, ce qui signifie que tous les 5 700 ans la moitié de sa masse s'est transformée (et n'est donc plus mesurable). Ces caractéristiques vont permettre de déterminer, approximativement, l'âge d'un échantillon.

Représenter graphiquement l'évolution de 0,15 mg de carbone 14 durant une période d'environ 86 000 ans.

Exercice 4

Si je donne 250 mg d'ampicilline^a à un patient, il va s'infiltrer dans le réseau sanguin puis sera filtré par les reins et le foie. On estime que chez un adulte, 40 % de l'antibiotique est éliminé chaque heure.

Représenter graphiquement l'évolution de la quantité d'antibiotique restant dans le corps du patient au cours d'une journée de 24 heures.

^a. L'ampicilline est un antibiotique à large spectre découvert en 1961 et utilisé dans le traitement d'infections bactériennes.