

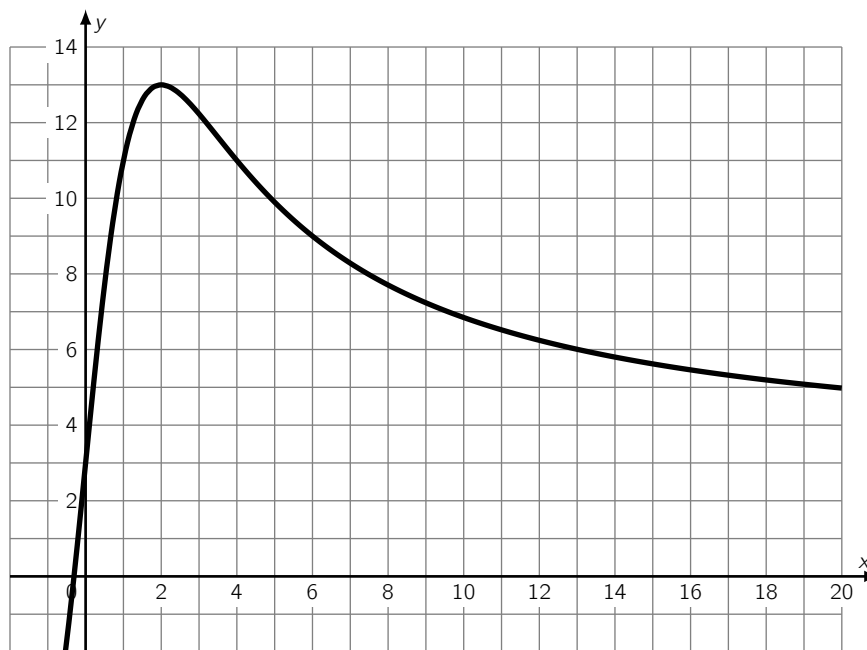
Chapitre 9

Synthèse de l'UAA 1

A) Représentation d'une fonction

Une fonction peut être représentée sous diverses formes :

a) Un graphique



b) Une formule

Pour obtenir le graphique ci-dessus, on a introduit, dans un logiciel graphique, la formule

$$f(x) = \frac{40x}{x^2 + 4} + 3$$

c) Un tableau de valeurs

Un tableau de valeurs de cette fonction pourrait être :

x	0	1	2	3	4	5	6	10
$f(x)$	3	11	13	12,23	11	9,896	9	6,85

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être lues sur le graphique.

Toutes les valeurs de $f(x)$ peuvent être calculées à partir de la formule dans laquelle on remplace x par le nombre choisi.

On a par exemple $f(6) = \frac{40 \cdot 6}{6^2 + 4} + 3 = 9$

B) Définition d'une fonction

Une fonction est une relation qui associe à chaque valeur de la variable x , au plus une (0 ou 1) valeur de y .

La variable x est appelée variable indépendante et la variable y est la variable dépendante.

Pour exprimer que y est une fonction de x , on écrit $y = f(x)$ ou $f : x \rightarrow y = f(x)$

C) Image d'un réel par une fonction

L'image d'un réel a par la fonction f est notée $f(a)$.

Le point $(a; f(a))$ appartient au graphe de la fonction.

Exemple : graphique de la fonction $f : x \rightarrow y = x^2 + 2x - 1$

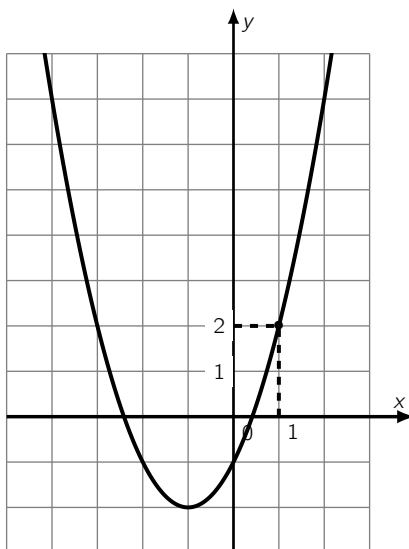


Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	-2	-1	2	7	14

L'image de 1 par la fonction f est 2. On écrit $f(1) = 2$.

Le point $(1; 2)$ appartient au graphique de la fonction.

D) Domaine et ensemble image d'une fonction

Le **domaine d'une fonction** est l'ensemble des valeurs acceptées par cette fonction. Autrement dit, c'est l'ensemble des réels ayant une image par cette fonction.

Il se lit sur l'axe des x et s'exprime sous la forme d'un intervalle.

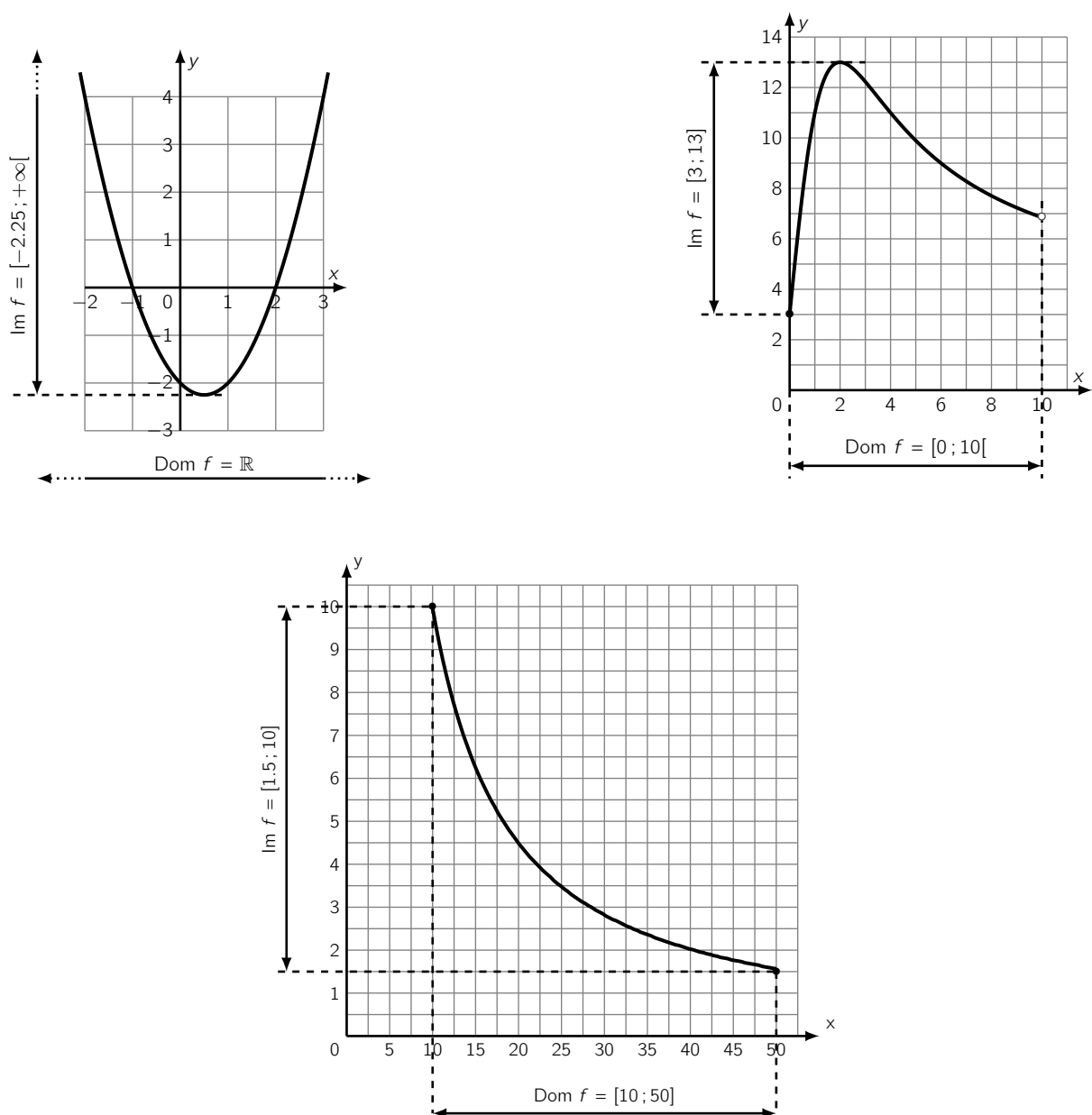
L'**ensemble image d'une fonction** est l'ensemble des réels images par cette fonction.

Il se lit sur l'axe des y et s'exprime sous la forme d'un intervalle.

Remarque : Sur le graphe,

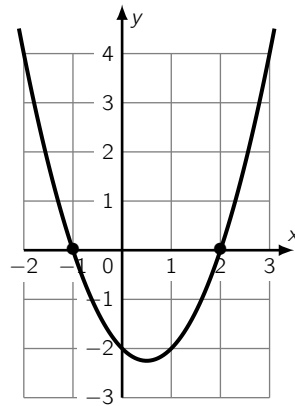
- * un point plein ($\bullet$) signifie que la valeur est comprise et donc que le point appartient bien au graphe de la fonction ;
- * un point creux ($\circ$) signifie que la valeur n'est pas comprise et donc que le point n'appartient pas au graphique de la fonction ;
- * l'absence de point (généralement en bord de graphe) signifie que le graphe continue au-delà de la représentation : cela correspond généralement à $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Exemples :



E) Racines d'une fonction

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$



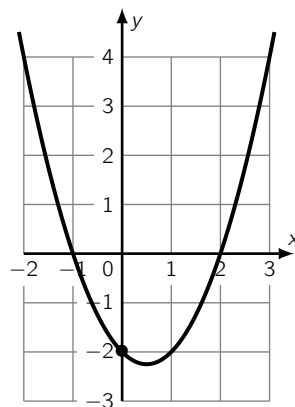
Nous constatons que cette fonction coupe l'axe des x en deux points : en $(-1; 0)$ et en $(2; 0)$.

Les abscisses des points d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe x sont appelés **racines** de la fonction.

Les racines de la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$ sont donc -1 et 2 .

F) Ordonnée à l'origine d'une fonction

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$



Cette fonction coupe l'axe des y en un point : en $(0; -2)$.

L'ordonnée du point d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe y est appelée **ordonnée à l'origine** de la fonction.

L'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$ est donc -2 .

G) Signe d'une fonction

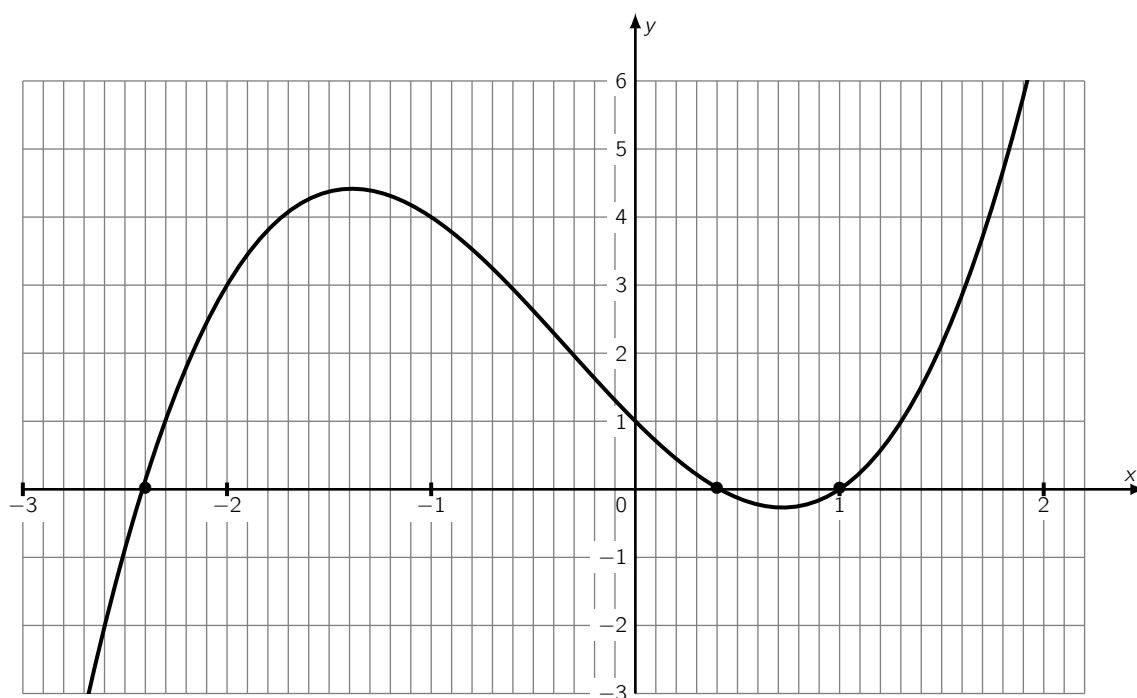
Le **tableau de signe** est une représentation schématique du signe d'une fonction (c'est-à-dire du signe des ordonnées de la fonction).

Pour le réaliser, il faut :

1. Déterminer le domaine de la fonction ;
2. Déterminer les racines de la fonction ;
3. Indiquer dans un tableau les racines dans l'ordre croissant des abscisses ;
4. Sous les racines, écrire « 0 » ;
5. Entre les « 0 », indiquer « + » si les ordonnées de la fonction sont positives, et « - » si les ordonnées sont négatives.

Exemple :

Le graphe ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$

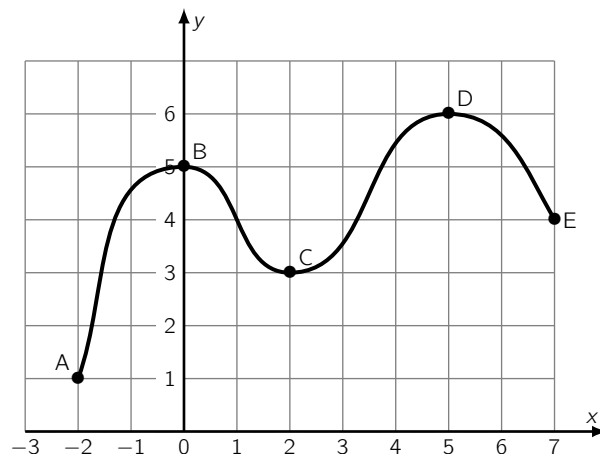


x		-2,4		0,4		1	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

H) Extrema d'une fonction

- * Une fonction admet un **maximum global** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est supérieure à celles de tous les autres points du graphique de la fonction.
- * Une fonction admet un **maximum local** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est supérieure à celles des points du graphique de la fonction situés dans son voisinage.
- * Une fonction admet un **minimum global** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est inférieure à celles de tous les autres points du graphique de la fonction.
- * Une fonction admet un **minimum local** au point P (P étant un point de son domaine) si l'ordonnée de ce point est inférieure à celles des points du graphique de la fonction situés dans son voisinage.

Exemple :

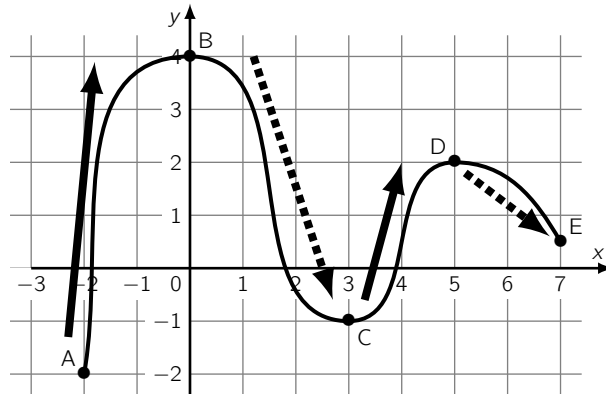


- * A est le *minimum global* de la fonction ;
- * B est un *maximum local* de la fonction ;
- * C est un *minimum local* de la fonction ;
- * D est le *maximum global* de la fonction ;
- * E est un *minimum local* de la fonction.

I) Variation d'une fonction

- * Une fonction est strictement **croissante** sur un intervalle défini si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors **$f(x)$ augmente** ;
- * Une fonction est strictement **décroissante** sur un intervalle défini si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors **$f(x)$ diminue**.

Exemple :



Sur les intervalles...

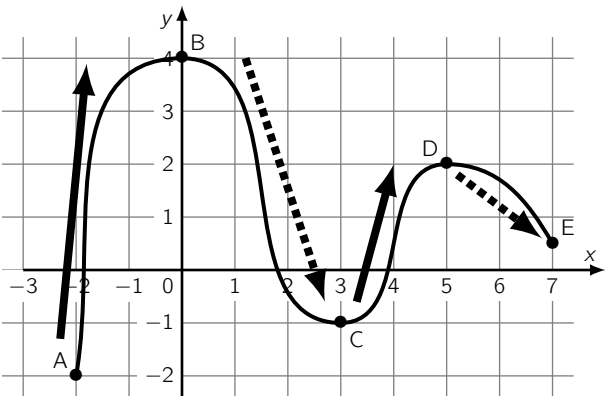
- * $] A ; B [$, la fonction est *croissante* ($\nearrow$) ;
- * $] B ; C [$, la fonction est *décroissante* ($\searrow$) ;
- * $] C ; D [$, la fonction est *croissante* ($\nearrow$) ;
- * $] D ; E]$, la fonction est *décroissante* ($\searrow$).

Le **tableau de variation** est une représentation schématique de l'allure d'une fonction.

Pour le réaliser, il faut :

1. Déterminer le domaine de la fonction ;
2. Déterminer les coordonnées des maxima et minima ;
3. Indiquer dans un tableau les coordonnées dans l'ordre croissant des abscisses ;
4. Indiquer les maxima et minima sous leurs coordonnées.
5. Entre ces coordonnées, mettre des flèches indiquant si la fonction est strictement croissante ($\nearrow$) ou strictement décroissante ($\searrow$).

Reprenons l'exemple ci-avant :

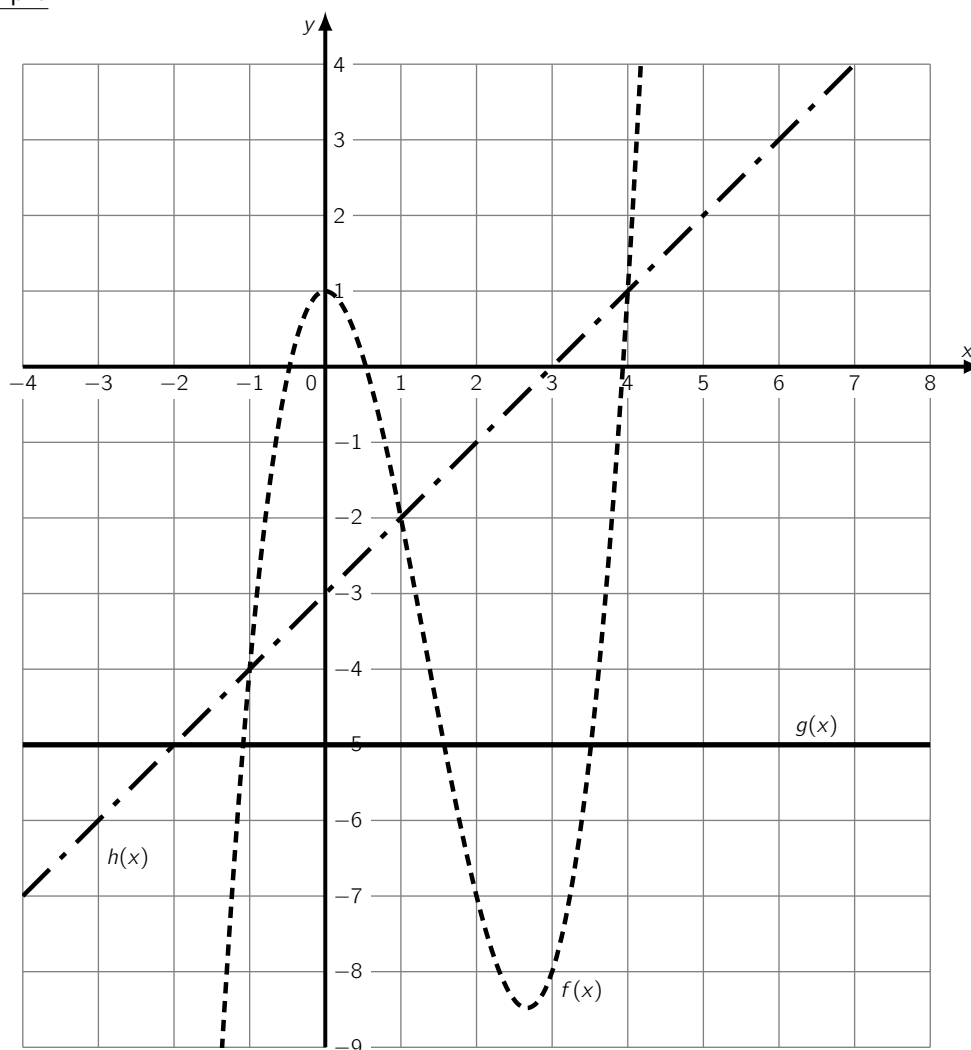


x	-2		0		3		5		7
$f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0,6

J) Comment résoudre graphiquement une équation/inéquation ?

Les solutions d'une équation de la forme $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des représentations graphiques de ces fonctions.

Exemple :



Avec : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$; $g(x) = -5$ et $h(x) = x - 3$.

- * Les solutions de l'équation $x^3 - 4x^2 + 1 = -5$ sont les points d'intersection entre la courbe qui représente $f(x)$ et celle de la droite $g(x)$.
On écrit $S = \{-1,09; 1,57; 3,51\}$.
- * Les solutions de l'équation $x^3 - 4x^2 + 1 = x - 3$ sont les points d'intersection entre la courbe qui représente $f(x)$ et celle de la courbe qui représente $h(x)$.
On écrit $S = \{-1; 1; 4\}$.
- * Les solutions de l'inéquation $x^3 - 4x^2 + 1 > x - 3$ sont
 $S =]-1; 1[\cup]4; +\infty[$