

Cours de mathématique

Équivalence des formules de la variance

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i - \bar{x})^2 \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(n_i (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \right) \quad \text{parce que } (x_i - \bar{x})^2 = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n n_i (-2x_i\bar{x}) + \sum_{i=1}^n n_i \bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n n_i x_i + n\bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) \quad \text{parce que } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - \frac{1}{n} n \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$