



OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

Sommaire

1. Composantes d'une fraction	1
2. Fractions équivalentes.....	1
3. Simplification d'une fraction	2
4. Règle d'addition et soustraction de fractions	3
5. Règle de multiplication de deux fractions.....	5
6. Règle de division de deux fractions.....	6
7. Exercices - Opérations sur les nombres	7

1. Composantes d'une fraction

La fraction $\frac{a}{b}$ est composée d'un numérateur (a) et d'un dénominateur (b).

2. Fractions équivalentes

Il est important de se rappeler qu'il existe plusieurs façons de représenter la même fraction. Par exemple, les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ sont tout à fait équivalentes. Mais comment passe-t-on d'une fraction à l'autre tout en conservant la relation d'équivalence ?

Une fraction reste équivalente si le numérateur et le dénominateur sont multipliés ou divisés par le même nombre.

Exemple

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 6}{30 \div 6} = \frac{4}{5}$$

3. Simplification d'une fraction

Une fraction est écrite sous forme simplifiée si le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun. En d'autres mots, sous forme simplifiée, il est impossible de trouver un nombre qui soit diviseur à la fois du numérateur et du dénominateur.

Exemple

La fraction $\frac{120}{200}$ n'est pas écrite sous forme simplifiée puisqu'il existe des nombres qui divisent 120 et 200. Le plus grand diviseur (facteur) commun de 120 et de 200 est 40, d'où

$$\frac{120}{200} = \frac{120 \div 40}{200 \div 40} = \frac{3}{5}$$

Puisque nous avons divisé le numérateur et le dénominateur par le même nombre (40), la fraction $\frac{3}{5}$ est équivalente à $\frac{120}{200}$. De plus $\frac{3}{5}$ est la forme simplifiée de $\frac{120}{200}$ puisque aucun facteur commun n'existe pour 3 et 5.

Une simplification peut s'effectuer en plusieurs étapes si on ne reconnaît pas, à prime abord, le plus grand facteur commun du numérateur et du dénominateur.

Exemple

$$\frac{108}{144} = \frac{108 \div 2}{144 \div 2} = \frac{54}{72} = \frac{54 \div 9}{72 \div 9} = \frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

Les amateurs du "Compte est bon" auront remarqué que 108 et 144 avaient pour facteur commun le nombre 36 :

$$\frac{108}{144} = \frac{108 \div 36}{144 \div 36} = \frac{3}{4}$$

Au bout du compte, quel que soit le nombre d'étapes effectuées, la même forme simplifiée sera trouvée...

4. Règle d'addition et soustraction de fractions

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Le symbole $\pm$, qui se lit "plus ou moins", indique que cette règle s'applique aussi bien aux additions qu'aux soustractions.

Exemple

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{6} = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Remarquez que la règle d'addition et de soustraction des fractions n'est applicable que si les deux fractions possèdent le même dénominateur. Or, ceci ne sera généralement pas le cas. Il faudra alors créer réécrire les fractions en fractions équivalentes ayant un dénominateur commun.

Exemple

Évaluer la somme $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

Ces fractions ne peuvent être additionnées avant de les avoir réécrites avec un dénominateur commun. Le plus petit commun multiple des nombres 3 et 5 est 15. 15 sera donc le commun dénominateur.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

Exemple

Évaluer la soustraction $\frac{3}{8} - \frac{17}{24}$

Le dénominateur commun (le plus petit commun multiple) des nombres 8 et 24 est 24. La fraction $\frac{17}{24}$ ne nécessite pas réécriture. Par contre, $\frac{3}{8}$ doit être écrit de sorte que 24 soit également son dénominateur.

$$\frac{3}{8} - \frac{17}{24} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} - \frac{17}{24} = \frac{9}{24} - \frac{17}{24} = \frac{-8}{24} = \frac{-1}{3}$$

Remarque : Il peut s'avérer utile d'effectuer, si possible, une simplification des fractions avant de procéder à l'addition ou la soustraction. Une telle simplification rendra plus facile l'obtention d'un dénominateur commun.

Exemple

Évaluer la somme $\frac{9}{12} + \frac{7}{14}$

$$\frac{9}{12} + \frac{7}{14} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} + \frac{7 \div 7}{14 \div 7} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

Dans l'exemple précédent, le dénominateur commun de 12 et 14 aurait été 84. En simplifiant d'abord chacune des fractions, les calculs ont été grandement réduits.

5. Règle de multiplication de deux fractions

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Il est important de noter que, contrairement aux additions, la règle de multiplication n'impose aucune contrainte à la valeur des dénominateurs. C'est-à-dire que ceux-ci n'ont nul besoin d'être communs.

Exemple

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{11} = \frac{4 \times 3}{7 \times 11} = \frac{12}{77}$$

$$\frac{-3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{-3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{-15}{8}$$

Remarque : Il peut être utile d'effectuer une simplification des fractions avant de procéder à la multiplication. En plus de pouvoir simplifier chaque fraction prise individuellement, simplifier le dénominateur d'une fraction avec le numérateur de l'autre est permis *pourvu que tous deux possèdent des facteurs communs*

Exemple

Évaluer le produit $\frac{27}{16} \times \frac{8}{81}$.

Vous remarquerez que les deux fractions en jeu, $\frac{27}{16}$ et $\frac{8}{81}$, sont déjà exprimées sous forme simplifiée. Toutefois, le dénominateur 16 et le numérateur 8 ont pour facteur commun le nombre 8. De plus, le dénominateur 81 et le numérateur 27 ont pour facteur commun le nombre 27. Il existe donc quelques simplifications possibles avant d'effectuer le produit

$$\frac{27}{16} \times \frac{8}{81} = \frac{27 \div 27}{16 \div 8} \times \frac{8 \div 8}{81 \div 27} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

6. Règle de division de deux fractions

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

La règle permet donc de transformer une division de fraction en une multiplication.

Exemple

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{8} = \frac{2}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{21}$$

Attention à la notation suivante qui décrit la même division :

$$\frac{2/7}{3/8} = \frac{2}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{21}$$

Quelques remarques finales

- Le fait de travailler avec des fractions ne modifie en rien la priorité des opérations.

Exemple

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

Un nombre entier peut toujours être écrit sous forme de fraction si une opération doit être effectuée entre celui-ci et une fraction.

Exemple

$$8 - \frac{5}{3} = \frac{8}{1} - \frac{5}{3} = \frac{24}{3} - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}$$

- Évitez de travailler avec des nombres mixtes... transformez-les plutôt en fractions simples.

Exemple

$$4^{2/7} = 4 + \frac{2}{7} = \frac{28}{7} + \frac{2}{7} = \frac{30}{7}$$

7. Exercices - Opérations sur les nombres

Effectuer les calculs suivants en respectant la priorité des opérations :

a) $8 - 2 \times (3 - 2 \times 5)$

b) $4 - 2 \times (-4) + 6 \div 2$

c) $8 - 2 \times 5 + 2 \times ((-2) - 3)$

d) $(8 - 2) \times (-3) - 2 \times ((-1) - 6)$

e) $\frac{2}{7} - \frac{5}{3} \times \frac{27}{35}$

f) $\frac{5}{8} + \frac{9}{25} \div \frac{18}{15}$

g) $\frac{2}{7} - \frac{5}{3}$

h) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

i) $\frac{5}{36} \times \frac{9}{25}$

j) $\frac{3}{8} \div \frac{4}{5}$

Solutions

a) 22

b) 15

c) -12

d) -4

e) -1

f) 37/40

g) -29/21

h) 17/20

i) 1/20

j) 15/32